

## 2. Základné charakteristiky nelineárnych a parametrických obvodov

### 2.1 Triedenie obvodových prvkov a obvodov

Základné stavebné prvky pre spracovanie spojitých signálov sú rezistor (odpor  $R$ ), kapacitor (kondenzátor s kapacitou  $C$ ), (cievka s indukčnosťou  $L$ ), transformátor (indukčnosti  $L_1, L_2$  a vzájomná indukčnosť  $M$ ). Parametre  $R, C, L$  nie sú vždy konštantné. Môžu sa meniť:

- a) následkom predchádzajúceho prúdu  $i$  alebo pôsobiaceho napätia  $u$
- b) vplyvom vonkajšej riadiacej veličiny.

V prípade a) je parameter funkciou prúdu alebo napätia, v prípade b) je funkciou externého parametra akými môže byť (vonkajšia mechanická, svetelná, tepelná veličina ovplyvňujúca parameter). Túto premennosť vlastností obvodových vlastností prvkov nie je pohodlné vyjadrovať funkčnou závislosťou parametra ale výhodnejšie je priame vyjadrenie vzájomnej závislosti obvodových veličín t.j. napätia  $u$  na prúde  $i$  (alebo ich integrály-spriahnutý mg. tok  $\psi$  a náboj  $q$ ). V prípade zotrvačných prvkov vyjadrujeme závislosť integrálu jednej obvodovej veličiny na druhej obvodovej veličine. Tieto závislosti sú vyjadrené základnými charakteristikami ( $i=f(u), u=f(q), \Psi=f(i)$  a pod.)

Sú to základné charakteristiky ( $i = f(u), u = f(q), \psi = f(i)$  a pod.)

$$\begin{aligned}
 R: \quad & i = \frac{u}{R}; \quad u = Ri \quad R = G^{-1} \\
 C: \quad & u = \frac{q}{C}; \quad i = \frac{dq}{dt} = \frac{df^{(-1)}(u)}{dt} \\
 L: \quad & i = \frac{\Psi}{L}; \quad u = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{df^{(-1)}(i)}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Triedenie prvkov:.

- a) Lineárne - parametre sú konštantné. Ich charakteristika je preto lineárna. Vzťahy (1) sa zjednodušia

$$\begin{aligned}
 R: \quad & i = \frac{u}{R}; \quad u = Ri \quad R = G^{-1} \\
 C: \quad & u = \frac{q}{C}; \quad i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \\
 L: \quad & i = \frac{\Psi}{L}; \quad u = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

- b) Nelineárne prvky. Závislé veličiny ( $i, u, \Psi, q$ ) na svorkách dvojpólu sú funkciou komplementárnych nezávislých veličinách (prúd  $i$ , ktorý nimi prechádza alebo napätí  $u$  na ich svorkách). Charakteristiky nie sú priamkové ale sú obecnými krivkami.
- c) Lineárne parametrické; parameter lineárneho prvku je závislý od inej vonkajšej veličiny. Charakteristiky sú priamkové, tvoriace sústavu priamok pre každú riadiacu veličinu zvlášť.
- d) Nelineárne parametrické; závislé obvodové veličiny ( $i, u, \Psi, q$ ) sú jednak funkciou nezávislej veličiny (prúd ktorý nimi prechádza, napätie na nich a pod) ale aj na vonkajšieho fyzikálneho parametra  $p$ . Sú charakterizované sústavou kriviek. Parametrom kriviek je vonkajší parameter  $p$ . Tieto závislosti označujeme ako charakteristiky.

Charakteristiky sú merané pri časovo konštantných alebo veľmi pomaly sa meniacich obvodových veličinách. Charakteristika opisuje chovanie výstupnej závislej veličiny  $Y$  pri zmenách nezávislej vstupnej jednosmernej veličiny  $X$ . Vstupná veličina  $X$  mení pritom svoju hodnotu v plnom intervale vstupných hodnôt. To jej umožní vyjadriť všetky nelineárne závislosti príslušného prvku

Z charakteristík opisujúcich závislosť  $Y$  na  $X$  možno určiť vybrané parametre. Tieto sa delia na parametre:

a) statické. Sú merané pri časovo konštantných alebo veľmi pomaly sa meniacich obvodových veličinách (obr.1.2 a) Charakteristika je opísaná

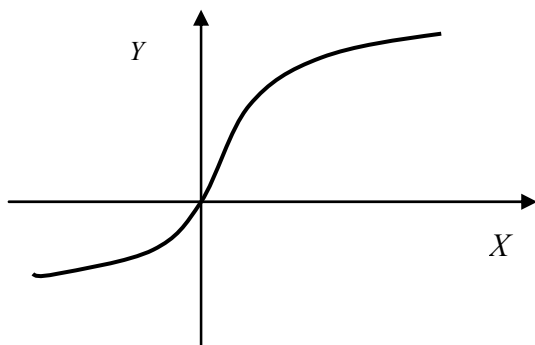
$$Y = f(X) \quad (2.3)$$

kde  $Y$  a  $X$  sú jednosmerné veličiny.

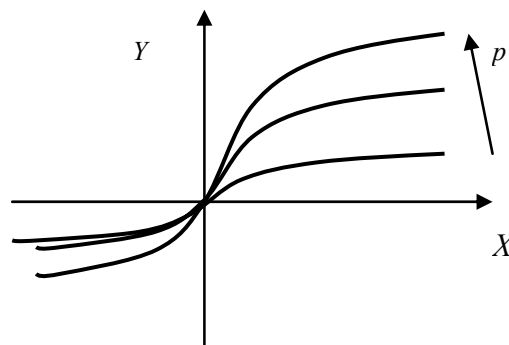
Okrem charakteristík chovanie obvodu môžeme opísať aj vybranými parametrami týchto závislostí:

- a. statické parametre. Sú definované ako pomer závislej premennej veličiny  $Y$  k nezávislej veličine pre jej konkrétnu hodnotu  $X_0$ .

$$Y = f(X) \Rightarrow P(X) = \frac{Y}{X} = \frac{f(X_0)}{X_0} \quad (2.4)$$



Obr.1.Nelineárna charakteristika



Nelineárna parametrická charakteristika

- b. diferenciálne (prírastkové) parametre. Vyjadrujú vzájomnú závislosť diferenciálu závislej premennej  $dY$  od diferenciálu nezávislej veličiny  $dX$  v danom pracovnom bode  $X_0$ .

$$Y = f(X) \Rightarrow P_D(X) = \frac{dY}{dX} = \frac{df(X)}{dX} \Big|_{X_0} \quad (2.5)$$

- c. Stredné hodnoty parametra. Statický parameter vyšetrovanej charakteristiky vyšetrujeme ako pomer amplitúdy prvej harmonickej zložky závislej veličiny  $Y_1$  pri zmenách amplitúdy nezávislej obvodovej veličiny  $X_1$  tej istej frekvencie .

$$y = \sum Y_i \cos(i\omega t) = f(X_1 \cos(\omega t)); \quad P_s(X_1) = \frac{Y_1}{X_1} \quad (2.6)$$

Často je tento parameter zhodný so statickým parametrom. Inou možnosťou je vyjadrenie pomeru medzi efektívnymi hodnotami závislej a nezávislej obvodovej veličiny.

Triedenie obvodov je zhodné s triedením obvodových prvkov do štyroch skupín. Zatriedenie je určené aspoň jedným prvkom z vyššej skupiny podľa náročnosti matematického opisu. Úlohou lineárnych obvodov je prenos signálu a prípadne vyčlenenie určitého frekvenčného pásma z jeho spektra. (možno dosiahnuť iba ochudobnenie spektra).

Úlohou nelineárnych a parametrických obvodov je premena frekvenčného spektra a zmena časového priebehu (tvary) signálu.

Obecná závislosť medzi výstupnou odozvou  $y(t)$  ako následok vstupnej veličiny  $x(t)$  (príčiny) je charakterizovaná nehomogennou diferenciálnou rovnicou  $n$ -tého stupňa (obvod obsahuje  $N$ -zotrvačných prvkov, akumulátor energie).

$$a_N \frac{d^N y}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t) \quad (2.7)$$

Túto rovnicu možno rozložiť na sústavu  $N$  diferenciálnych rovníc 1. stupňa. Tento tvar je vhodnejší pre numerickú integráciu.

$$\frac{dy}{dt} = y_1, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt} = y_2,$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{N-2}' \\ y_{N-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & \vdots \\ \vdots, & \vdots, & \vdots, & \dots, & \vdots, & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 1 \\ -b_0, & -b_1, & -b_2, & \dots, & -b_{N-2}, & -b_{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \cdot x(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Koeficienty

$$b_0 = \frac{a_0}{a_N}, b_N = \frac{a_1}{a_N}, \dots, b_{N-1} = \frac{a_{N-1}}{a_N}, c = \frac{1}{a_N}$$

závisia na parametroch obvodových prvkov.

Vlastnosti koeficientov závisia od charakteru obvodu:

Lineárne obvody (LO). Parametra všetkých prvkov a tým aj koeficientov v rovniciach (2.7) a (2.8) sú konštantné (časovo invariantné). Diferenciálna rovnica je lineárnou s konštantnými koeficientami. Riešenie je v tvare

$$y(t) = f(x(t), a_0, a_1, \dots, a_N) \quad (2.9)$$

Platia všetky zákony analýzy lineárnych obvodov.

Lineárne parametrické obvody (LPO). Parametre prvkov obvodu (minimálne jeden) a teda aj koeficienty rovníc (2.7), (2.8) nezávisia na napätí a prúde ale sú funkciou parametra. Chovanie obvodu je popísané lineárnymi diferenciálnymi rovnicami s premennými koeficientami. Fázy sú opísané lineárnymi diferenciálnymi rovnicami s koeficientami ako funkciami parametra  $p$ . Riešenie sústavy je v tvare

$$y(t) = f(x(t), a_0(t), a_1(t), \dots, a_N(t)) \quad (2.10)$$

Platí tu princíp superpozície, no dochádza k obohateniu frekvenčného spektra signálu.

Nelineárne obvody (NO). Parametre prvkov obvodu (minimálne jeden) závisia na napätí alebo prúde v obvode. Riešenie je predstavované nelineárnou funkčnou závislosťou

$$y(t) = f(x(t), a_0(y), a_1(y), \dots, a_N(y)) \quad (2.11)$$

Neplatí tu princíp superpozície a dochádza v nich k premene frekvenčného spektra signálu.

Nelineárne parametrické obvody (NPO). Parametre prvkov závisia nielen na napätí a prúde ale aj na čase prostredníctvom vonkajšej veličiny. Riešenie je v tvare

$$y(t) = f(x(t), a_0(y, t), a_1(y, t), \dots, a_N(y, t)) \quad (2.12)$$

Neplatí tu princíp superpozície a dochádza k transformácii frekvenčného spektra. Podľa počtu samostatných akumulčných prvkov obvodu určujeme rád obvodu. Ak obsahuje sústava iba nezotrvačné rezistory (lineárne alebo nelineárne) predstavuje takýto obvod, obvod nultého rádu alebo nezotrvačný obvod. Javy v takomto obvode opisujú algebraické (lineárny prípad) alebo transcendentné (nelineárny prípad) rovnice. Obvody obsahujúce  $N$  nezávislých akumulčných prvkov (lineárnych, riadených a nelineárnych) a ľubovoľný počet rezistorov (lineárnych riadených alebo nelineárnych) sú obvody  $N$ -tého rádu. Javy obvodu opisuje sústava  $N$  nelineárnych (lineárnych) diferenciálnych rovníc (1.4) alebo jedna nelineárna diferenciálna rovnica  $N$ -tého rádu (1.3)

## 2.2 Idealizácia elektronických prvkov a obvodov

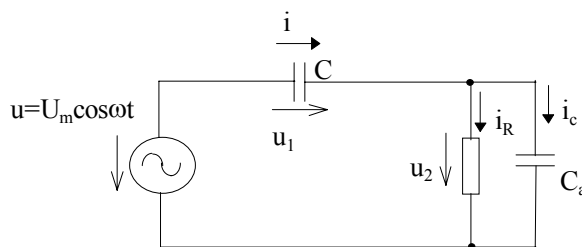
Presne vzaté, sú všetky obvody nelineárne a parametrické. Zmena vonkajších faktorov vnútornými elektrickými veličinami a následné spätné pôsobenie vonkajších faktorov na parametre prvkov obvodu (elektrický výkon spôsobujúci zmenu teploty a jej spätné pôsobenie na parametre prvkov obvodu) predstavuje pri presnej analýze nelineárne javy.

Ak sa uvažujú isté hraničné podmienky napr. činnosť obvodu v obmedzenom rozsahu napätí a prúdov. Potom môžeme väčšinu prvkov obvodu považovať za lineárne. Zostávajú iba vybrané prvky, ktorých dominujúcou vlastnosťou je nelinearita a tie budeme považovať za nelineárne. Toto obmedzenie budeme označovať ako obmedzenie veľkosti signálu.

Ďalším obmedzujúcim predpokladom bude predpoklad, že vplyv vonkajších faktorov na obvod (teplota, žiarenie a pod.) bude nezávislý od spracovávaného signálu - parametrické javy budú nezávislé. Zmena vonkajších faktorov vnútornými elektrickými veličinami a spätné pôsobenie vonkajších faktorov na parametre prvkov obvodu (elektrický výkon spôsobujúci zmenu teploty a jej spätné pôsobenie na parametre prvkov obvodu) nebude uvažovaný. Za určitých podmienok napr. pri činnosti obvodu v obmedzenom rozsahu napätí a prúdov väčšina prvkov obvodu splňuje tento predpoklad. Toto obmedzenie budeme označovať ako obmedzenie nezávislosti vonkajšieho parametra. Pre potlačenie vplyvu vonkajších veličín prijmeme podmienku konštantnosti vonkajších vplyvov. Analýzu opakujeme pre rôzne hodnoty externých veličín (parametrizujúcich).

Obdobne, dynamické vlastnosti skúmaného obvodu nemožno opísať úplne presne (uvažovanie všetkých parazitných väzobných vplyvov prostredníctvom elmag. poľa). Aj tu musíme pristúpiť k účinným obmedzeniam rýchlosti časových zmien (frekvencie) signálu. Pri analýze zanedbáme vplyv tých akumuláčnych prvkov ktoré pri študovanom procese neovplyvnia zmenou svojej energie výrazne chovanie sústavy. Ak analyzujeme chovanie sústavy v časovej oblasti zanedbáme vplyv tých prvkov ktorých časová konštanta je zanedbateľná k dominantným časovým konštantám. Ak analyzujeme chovanie vo frekvenčnej oblasti pričom za určujúce považujeme frekvenčné zložky z intervalu  $(f, \omega_m)$ , potom pôsobenie prvkov, ktorých impedancia je pre frekvencie z tohto intervalu voči blízkym impedanciam zanedbateľná, môžeme vynechať.

Príklad: Majme jednoduchý obvod RC obr. 1.3, kde C predstavuje parazitnú kapacitu. Nech je budiace napätie harmonické.  $U_m \cos \omega t$



Obr. 1.3 Jednoduchý RC Obvod

Potom amplitúdy prúdov sú určené

$$I_C = [U_2 j\omega C_a] ; I_R = \frac{U_2}{R} ; I = I_R + I_C$$

Prenapätia

$$U_1 = \left[ \dot{I} \cdot \frac{1}{j\omega C} \right] ; U_2 = [\dot{I} \cdot Z] ; Z = \frac{R}{1 + j\omega C_a R} ; U_m = U_1 + U_2$$

Pokiaľ pripustíme 1% hranicu zaokrúhlenia môžeme účinok kondenzátora C zanedbať pre také hodnoty  $\omega$  pokiaľ platí nerovnosť

$$I_{Ca} < 10^{-2} I_R ; \text{t.j. } \omega_2 < \frac{10^{-2}}{RC_a}$$

Účinok kondenzátora C možno naopak zanedbať od frekvencie  $\omega$  kedy

$$U_1 < 10^{-2} U_2 ; \text{t.j. } \omega_1 > |Z| \cdot \frac{10^{-2}}{C}$$

Tieto frekvencie sa ľahko určia ak platí podmienka  $\omega_1 > \omega_2$ , ktorá jediná z hľadiska funkčnosti obvodu má zmysel. Posúdenie v časovej oblasti je zrejmé.

Pri zložitých obvodoch je teoreticky postup pri vyšetrovaní kritéria pomalosti signálu často obtiažnejšie než vlastné riešenie obvodu. Preto sa opierame o empirické zistenie, ktoré parametre môžeme v prvej iterácii zanedbať. Kontrolným výpočtom výsledného riešenia v úplnej rovnici obvodu posúdime správnosť prijatých zjednodušení.

## 2.3. Stavý a deje v nelineárnych a parametrických obvodoch

Stav obvodu môžeme definovať ako súhrn okamžitých hodnôt obvodových veličín vo vyšetrovanom obvode. Dejom potom rozumíme určitú časovú postupnosť okamžitých stavov obvodových veličín v skúmanom obvode. Poznáme dva druhy:

- 1.) Deje pri ktorých sa jednotlivé okamžité stavy neopakujú. Prechodové deje.
- 2.) Deje pri ktorých sa okamžité stavy opakujú. Ustálené deje. Ustálené deje môžu byť:

a) Jednosmerný ustálený resp. kludový stav

b) Periodický ustálený dej. Jednotlivé stavy sa periodicky opakujú buď: vplyvom vonkajšieho zdroja (sústavy neautonómne), alebo samovoľné kmity za podmienok nestability sústavy (obvody autonómne)

## 2.4. Platnosť niektorých zákonov pre nelineárne a parametrické obvody

**Kirchhoffové zákony.** Obidva zákony platia ako pre lineárne tak aj pre nelineárne obvody

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^n u_k = 0 \quad (2.13)$$

Pri zostavovaní rovníc musíme brať do úvahy VA charakteristiky. nelineárnych rezistorov. Ak poznáme charakteristiku  $u(i)$  zostavíme rovnicu vzhľadom k prúdu  $i$ , pri charakteristike  $i(u)$  zostavíme rovnicu vzhľadom k napätiu  $u$ .

Rovnaké doporučenia platia aj pre nelineárne kapacitory (s charakter.  $q(u)$  resp.  $u(q)$ ) a nelineárne induktory ( $\Psi(i)$  resp.  $i(\Psi)$ ).

**Princíp superpozície.** Platí pre všetky lineárne obvody a parametrické lineárne obvody.

**Dôkaz:** Závislosť medzi výstupným signálom  $y(t)$  a vstupným signálom  $x(t)$  pre LPO je vyjadrená vzťahom

$$y(t) = P(t) \cdot x(t) \quad (2.14)$$

Ak pozostáva vstupný signál z  $N$  zložiek

$$x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t)$$

potom výstupný signál  $y(t)$  je

$$y(t) = P(t) \cdot \sum_{n=1}^N x_n(t) = P(t) \cdot x_1(t) + P(t) \cdot x_2(t) + \dots + P(t) \cdot x_N(t) \quad (2.15)$$

Ak označíme  $y_n(t) = P(t) \cdot x_n(t)$  potom

$$y(t) = \sum_{n=1}^N y_n(t) \quad (2.16)$$

Odozva LO a LPO na pôsobenie súčtu signálov je rovná súčtu odoziev na pôsobenie každého signálu zvlášť.

Pre nelineárne obvody (súhrn NO a NPO) princíp superpozície neplatí.

**Príklad:** majme sústavu s kvadratickou prenosovou funkciou. Vstupný signál je určený súčtom zložiek  $x_1$  a  $x_2$ .

Možno to ukázať na príklade jednoduchej kvadratickej závislosti.

$$y = ax^2 \quad (2.17)$$

Potom odozva je určená výrazom

$$y = ax_1^2 + ax_2^2 + 2ax_1x_2 \quad (2.18)$$

Vo výstupnom signále sa objavila nová zložka  $2ax_1x_2$

**Princíp kompenzácie.** V nelineárnom obvode možno nahradiť nelineárny prúdovo závislý rezistor  $u_R=U(i)$  prúdovo závislým zdrojom napätia bez toho, aby sa zmenil stav obvodu. (Veľkosť napätia zdroja rovná sa úbytku na rezistore; smer zhodnej so smerom prúdu).

Analogicky možno napätovo závislý rezistor  $i_R=I(U)$  nahradiť napätovo závislým zdrojom prúdu  $I_K=i_R$ . Riadenými zdrojmi napätia  $u_k$  alebo prúdu  $i_k$

je možné podľa princípu kompenzácie nahradiť odpovedajúcim spôsobom aj nelineárne induktory resp. kapacitory ( $u_k = L di_L / dt$ ,  $i_k = C du_C / dt$ ).

## 2.5. Obecná charakteristika základných premien v nelineárnych a parametrických obvodoch

Nelineárne a parametrické obvody umožnia uskutočniť rad premien využiteľných v technickej praxi.

1. Premena striedavého napätia na jednosmerné. Usmerňovače
2. Premena jednosmerného napätia na striedavé. Oscilátory, generátory, striedače a pod.
3. Násobenie frekvencie. Premena signálu s frekvenciou  $\omega$  na signál s frekvenciou  $n\omega$  kde  $n=2,3, \dots$  prir. číslo. Násobičky frekvencie.
4. Delenie frekvencie. Premena signálu  $\omega$  na signál s frekvenciou  $\omega/n$  pre  $n=2,3 \dots$  prir. číslo. Deličky frekvencie.
5. Transformácia frekvencie harmonického signálu ( $m/n$ ) krát, kde  $m=2,3,4 \dots$  a  $n=2,3,4 \dots$  pričom  $m \neq n$ . Meniče frekvencie.
6. Transponovanie spektra signálu. Pre dva vstupné signály (pričom jeden môže byť modulovaný) s frekvenciami  $\omega_1$  a  $\omega_2$  po takejto operácii dostaneme výstupný signál  $n\omega_1 \pm m\omega_2$ . Zmiešavače.
7. Stabilizácia napätia alebo prúdu (jednosmerného alebo striedavého). Na výstupe dostaneme konštantné napätie alebo prúd (jednosmerný stabilizátor) resp. konštantnú amplitúdu napätia alebo prúdu (striedavý stabilizátor) aj keď sa parametre záťaže alebo parametre vstupného napätia (prúdu) sa v istých medziach menia. Stabilizátory.
8. Premena tvaru signálu. Napr. harmonický signál na pravouhlý alebo trojuholníkový. Tvarovacie obvody, obmedzovače, okienkové diskriminátory.
9. Analógová realizácia matematických operácií. Logaritmujúce obvody, násobiace, sčítavacie obvody. Obvody analógových počítačov.
10. Amplitúdová, frekvenčná, fázová alebo impulzová modulácia signálov. Modulátory.
11. Zosilňovanie napätia, prúdu alebo výkonu. Zosilňovače.
12. Demodulovanie signálov. Obnovenie modulačného signálu demoduláciou modulovaného signálu. Demodulátory.
13. Logaritmovanie a umocňovanie signálu. Funkčné meničky.
14. Násobenie dvoch alebo viac signálov ako funkcií času. Na výstupe násobičky je signál ktorého okamžitá hodnota je úmerná súčinu okamžitých hodnôt vstupných veličín. Násobička.
15. Delenie signálov t.j. získanie podielu dvoch časových funkcií. Deličky signálov.



16. Vytvorenie obvodov so záporným odporom, kapacitou alebo indukčnosťou predstavujú nelineárny (alebo riadený) kapacitor alebo induktor. Syntetické rezistory, syntetické kapacitory, syntetické induktory.

17. Uskutočnenie logických funkcií v logických obvodoch.

18. Obvody časovej a amplitúdovej diskretizácie spojitého signálu. Vzorkovacie obvody, analógovo-číslícové prevodníky.

19. Obvody časového a amplitúdového spojenia diskretných číslicových signálov. Číslícovo analógové prevodníky.

20. Prepínače a spínače signálu.

To predstavuje najdôležitejšiu skupinu meničov a funkcií ktoré možno nelineárnymi a parametrickými obvodmi uskutočniť.

## 2.6. Základné charakteristiky idealizovaných prvkov

Elektrické vlastností dvojpólov či obecné mnohopólov charakterizujeme vzťahmi medzi svorkovými veličinami napätím  $u$ , prúdom  $i$ , nábojom  $q$  a spriahnutým (celkovým) magnetickým tokom  $\psi$ .

Charakteristiky dvojpólov. Obecné nelineárne:

1.  $u(i)$  voltamperová;  $i(u)$  ampervoltová charakteristika rezistora
2.  $q(u)$  coulombvoltová;  $u(q)$  voltcoulombová charakteristika \_kapacitora.
3.  $\psi(i)$  weberamperová;  $i(\psi)$  amperweberová charakteristika \_induktora.

Táto funkčná závislosť môže byť ešte ovplyvnená vonkajším parametrom  $p$  (teplota, osvetlenie, tlak, sila, rýchlosť...) Charakteristiky budú vyjadrené funkciami:

- Riadený rezistor;  $i(u,p)$ ; alebo  $u(i,p)$
- Riadený kapacitor;  $q(u,p)$ ; alebo  $u(q,p)$
- Riadený induktor;  $\psi(i,p)$ ; alebo  $i(\psi,p)$

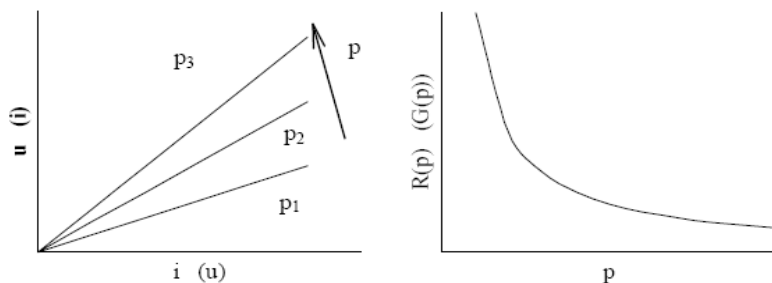
Tieto obecné závislosti možno pre jednotlivé dvojpoly popísať obvodovými parametrami.

### Rezistory

a. Lineárne rezistory. Priamková závislosť  $u = R \cdot i$ ;  $i = G \cdot u$ .

b. Lineárne riadené rezistory. Charakterizované sústavou priamok v rovine  $u-i$  (obr.2.2)

$$u = R(p) \cdot i \quad i = G(p) \cdot u$$



Obr. 2.2 Charakteristiky rezistora

c. Nelineárny rezistor. Charakterizovaný nelineárnymi závislosťami

$$i = i(u) \quad \text{alebo} \quad u = u(i) \quad (2.19)$$

Pre túto charakteristiku možno zaviesť parametre, ktoré sú funkčne závislé.

Statická vodivosť  $G(u)$  resp. odpor  $R(i)$

$$G(u) = \frac{i(u)}{u} ; \quad R(i) = \frac{u(i)}{i} \quad (2.20)$$

Diferenciálna vodivosť  $G(u)$  resp. odpor  $R(i)$

$$G_d(u) = \frac{di(u)}{du} ; \quad R_d(i) = \frac{du(i)}{di} \quad (2.21)$$

Nelineárne riadené rezistory. Charakterizované funkčnými závislosťami

$$i = i(u, p) \quad ; \quad u = u(i, p) \quad (2.22)$$

Statická vodivosť  $G(u, p)$  resp. odpor

$$G(u, p) = \frac{i(u, p)}{u} ; \quad R(i, p) = \frac{u(i, p)}{i} \quad (2.23)$$

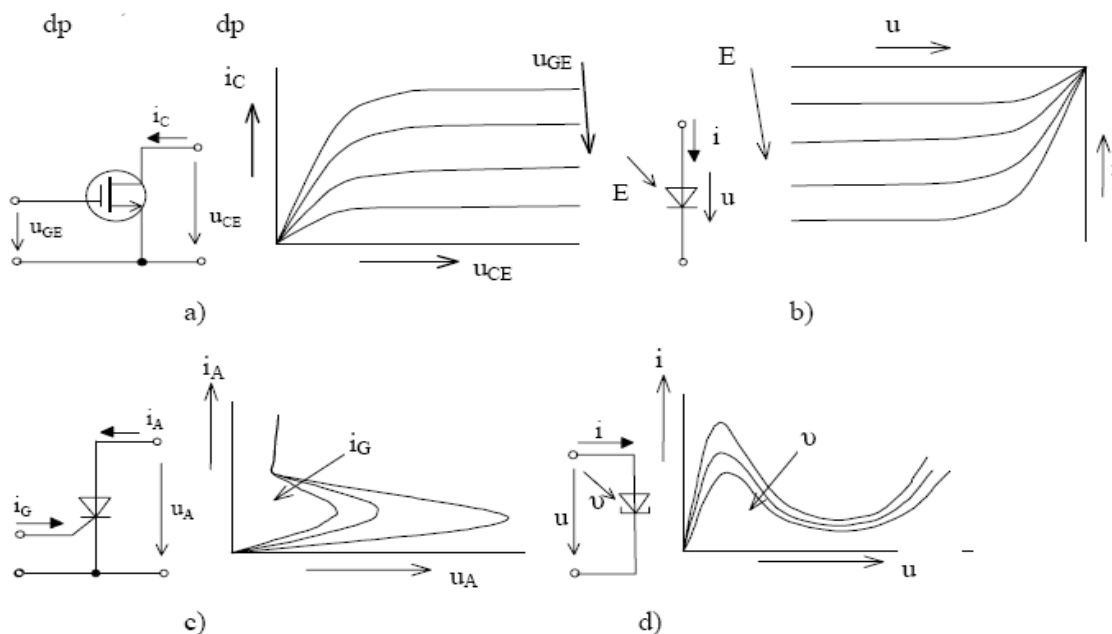
Diferenciálna vodivosť  $G(u, p)$  resp. odpor  $R(u, p)$

$$G_d(u, p) = \frac{di(u, p)}{du} ; \quad R_d(i, p) = \frac{du(i, p)}{di} \quad (2.24)$$

Na obr. 2.3. c, d sú krivky s oblasťou záporného diferenciálneho odporu tvaru S a N. Pôsobenie parametra je charakterizované diferenciálnym prenosom, kde závisle

premennú derivujeme parametrom

$$\frac{di(u, p)}{dp} ; \quad \frac{du(i, p)}{dp}$$



Obr. 2.3 Charakteristiky nelineárných a parametrických obvodov

V charakteristických prvkoch využiteľným parametrom je riadiace napätie resp. prúd.

Pre takéto systémy môžeme zaviesť:

1. prenosovú diferenciálnu vodivosť  $G_d(u, u_1) = \frac{\partial i(u, u_1)}{\partial u_1}$
2. prenosový diferenciálny odpor  $R_d(i, i_1) = \frac{\partial u(i, i_1)}{\partial i}$
3. diferenciálny napäťový prenos  $A(i, u_1) = \frac{\partial u(i, u_1)}{\partial u_1}$
4. diferenciálny prúdový prenos  $K(u, i_1) = \frac{\partial i(u, i_1)}{\partial i_1}$

### Kapacity

Lineárne capacity, Lineárne riadené capacity.

Všeobecná je táto skupina kapacitorov predstavovaná sústavou priamok v rovine  $q$ - $u$ , pričom každá priamka odpovedá jednej hodnote parametra  $p$ .

Chovanie lineárneho kapacitora je predstavované jednou priamkou (jednou hodnotou parametra  $p$ ).  $q = C(p) \cdot u$   $q = C(p)u$ . Ak parametrom je čas potom  $q = C(t)u$ .

Statická kapacita  $C(p)$  je určená pomerom a je zhodná s dynamickou  $C_d(p)$ .

$$C(p) = \frac{q}{u} \quad (2.24)$$

Hodnota prúdu ak parametrom je čas

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C(t) \frac{du(t)}{dt} + u(t) \frac{dC(t)}{dt} \quad (2.25)$$

Náhradou tohto kondenzátora je paralelne zapojenie kondenzátora  $C(t)$  časovou premennou vodivosťou  $G(t)=dC(t)/dt$ .

Druhý člen pri lineárnych kapacitoroch je nulový.

Chovanie lineárneho kapacitora je predstavované jednou priamkou. Hodnota kapacity je konštanta.

Nelineárne kapacitory, Nelineárne riadené kapacitory. Funkčná závislosť  $q = q(u,p)$ ; alebo  $u=u(q,p)$  je predstavovaná sústavou kriviek v rovine  $q$ - $u$ . Nelineárny kapacitor je predstavovaný len jednou z kriviek (jeden, konštantný parameter  $p_0$ ).

Analogický možno zaviesť ich parametre.

Statická kapacita je určená

$$C(u, p) = \frac{q(u, p)}{u} \quad (2.26)$$

Diferenciálna kapacita

$$C_d(u, p) = \frac{\partial q(u, p)}{\partial u} \quad (2.27)$$

a prenosový diferenciálny parameter

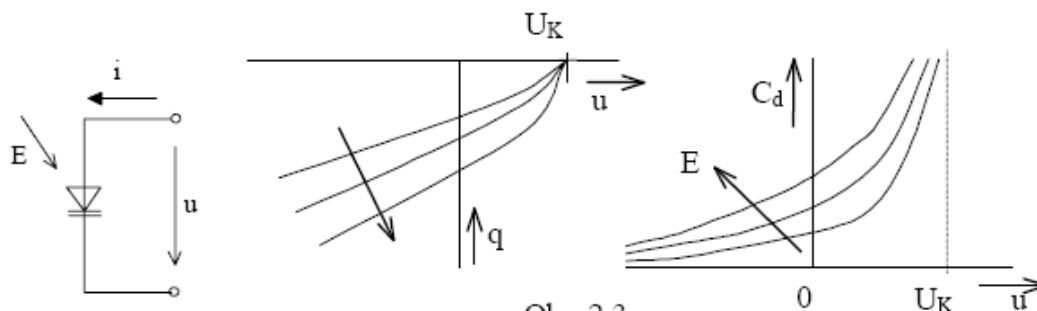
$$K_d(u, p) = \frac{\partial q(u, p)}{\partial p}$$

Hodnota prúdu  $i(t)$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [C(u, p) \cdot u] = \left[ C(u, p) + u \frac{\partial C(u, p)}{\partial u} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + u \left[ \frac{\partial C(u, p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \right] \quad (2.28)$$

Tento obvod možno charakterizovať paralelnym zapojením kondenzátora hodnotou určenou výrazom v prvej hranatej zátvorke (2.11) a vodivosťou určenou v druhej hranatej zátvorke.

Príkladom nelineárnych riadených kapacitorov sú fotovarikapy diódové (obr. 2.3) alebo kondenzátory s feroelektrikom riadené tlakom alebo teplotou.



Obr. 2.3 Nelineárne parametricky riadené kapacity

## Induktory

Lineárne induktory, Lineárne riadené induktory.

Podobne ako v predchádzajúcom prípade lineárne induktory sú iba jedným prípadom z lineárne riadených induktorov pre jeden parameter  $p_0$  z celej sústavy priamok v rovine  $\psi$ - $i$ . Lineárne riadené induktory sú charakterizované vzťahom  $\psi = L(p) \cdot i$  ak parametrom je čas  $\psi = L(t) \cdot i$

Indukčnosť statická je zhodná s diferenciálnou

$$L(p) = \frac{\psi}{i} = \frac{d\psi}{di} = L_d(p) \quad (2.29)$$

Napätie na induktore

$$u(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = L(p) \frac{di(t)}{dt} + i(t) \frac{\partial L(p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{dt} \quad (2.30)$$

Nelineárne induktory, nelineárne riadené induktory. Funkčná závislosť  $\psi = j(i, p)$  resp.  $i = \psi(j, p)$  je vyjadrená sústavou kriviek v rovine  $\psi$ - $i$ . Nelineárne induktory sú charakterizované iba jednou krivkou (pre  $p_0$ ). Parametrami odvodenými z týchto závislostí sú:

Statická indukčnosť

$$L(i, p) = \frac{\psi(i, p)}{i}$$

Diferenciálna indukčnosť

$$L_d(i, p) = \frac{\partial \psi(i, p)}{\partial i}$$

Prenosové diferenciálne parametre

$$K_d(i, p) = \frac{\partial \psi(i, p)}{\partial p}$$

Potom napätie na induktore je určené

$$u(t) = \frac{\partial \psi(i, p)}{\partial t} = \left[ L(i, p) + i \frac{\partial L(i, p)}{\partial i} \right] \frac{di}{dt} + i \left[ \frac{\partial L(i, p)}{\partial p} \frac{dp}{dt} \right] \quad (2.31)$$

Prvý člen predstavuje diferenciálnu indukčnosť a druhý prenos. Možno ho nahradiť sériovým zapojením indukčnosti určenou výrazom v prvej hranatej zátvorke a odporom s hodnotou určenou v druhej hranatej zátvorke.

$$u(t) = \frac{\partial \psi(i, p)}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial \psi(i, p)}{\partial p} \frac{dp}{dt} = L_d(i, p) \frac{di}{dt} + K_d(i, p) \frac{dp}{dt} \quad (2.32)$$

Príkladom nelineárneho riadeného induktora je cievka s toroidným feromagnetickým jadrom a riadiacim vinutím. Zmenou riadiaceho prúdu sa WbA charakteristiky posunujú.

Ideálne zdroje elektrickej energie.

Nezávislé (neriadené) zdroje napätia alebo prúdu. Môžu byť jednosmerné alebo definovanou funkciou času.

Riadené zdroje. Výstupná elektrická veličina ideálneho zdroja je riadená vstupnou veličinou. Existujú štyri typy lineárne elektricky riadených zdrojov:

1. Zdroj napätia riadený napätím ( $i_1=0$ )  $u_2=Eu_1$
2. Zdroj napätia riadený prúdom ( $u_1=0$ );  $u_2=H \cdot i_1$
3. Zdroj prúdu riadený napätím ( $i_1=0$ );  $i_2=Gu_1$
4. Zdroj prúdu riadený prúdom ( $u_1=0$ );  $i_2=Fi_1$

Závislosť medzi výstupnou veličinou ideálneho zdroja energie a riadiacou veličinou môže byť aj nelineárna

$$u_2 = E(u_1) ; \quad u_2 = H(i_1) ; \quad i_2 = G(u_1) ; \quad i_2 = F(i_1) \quad (2.33)$$

kde E(), H(), G(), F() predstavujú funkčnú závislosť.

Ideálne riadené zdroje môžu byť riadené z viacerých vstupov. Potom výstupná elektrická veličina y je určená funkčnou závislosťou f od vstupných veličín  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Najjednoduchší je prípad lineárnej závislosti s koeficientami  $f_1, f_2, \dots, f_n$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \dots + f_n \cdot x_n \quad (2.34)$$

Vstupnými veličinami môžu byť súčasne prúdy a napätia.

## 2.7. Aproximácia charakteristík nelineárnych prvkov

Charakteristiky nelineárnych jednobranov sa získavajú najčastejšie experimentálne, oveľa ťažšie je ich určenie pomocou teoretickej analýzy. Okrem toho pre ich použitie pri numerickej analýze je dôležitá ich matematická jednoduchosť pri dostatočnej presnosti. Problém aproximácie pre namerané tabuľkové údaje riešime v dvoch krokoch:

1. výber vhodnej aproximačnej funkcie
2. pre túto aproximačnú funkciu potom vyšetříme jej koeficienty.

V rádiotechnike sa najčastejšie využívajú tieto aproximačné funkcie:

- a) Po častiach lineárna aproximácia.

Využíva náhradu reálnej charakteristiky úsečkami s rôznym náklonom. Pri výpočte sa využíva taká úsečková náhrada, ktorá svojim intervalom platnosti pre nezávislú veličinu odpovedá jej okamžitej hodnote.

b) Mocninový mnohočlen

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N = \sum_{n=0}^N a_n x^n \quad (2.35)$$

má konštantné koeficienty  $a_0, a_1, \dots, a_N$  závisiace na priebehu charakteristiky. (Patrí sem aj priamková aproximácia bod a) )

O stupni  $N$  tohoto mnohočlena rozhoduje predovšetkým tvar charakteristiky a to aká chyba aproximácie je prípustná. Koeficienty určíme buď vhodnou numerickou interpoláciou (z experimentálnych tabuľkových údajov) alebo pomocou Taylorového radu (pri analytickom opise značnej zložitosti). (Unipolárne prvky)

c) Exponenciálny mnohočlen

$$y = a_0 + a_1e^{b_1x} + a_2e^{b_2x} + \dots + a_Ne^{b_Nx} = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n e^{b_nx} \quad (2.36)$$

$a_n, b_n$  sú opäť koeficienty aproximačného mnohočlena. (Bipolárne prvky)

d) Racionálna lomená funkcia

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Mx^M} \quad (2.37)$$

Táto funkcia sa najčastejšie používa v najjednoduchšom tvare keď  $M = 1$ . (Parametrické obvody).

e) Mocninová funkcia

$$y = ax^{\pm \frac{m}{n}} \quad (2.38)$$

kde  $m$  a  $n$  sú prirodzené čísla (Vákuové elektrónky)

f) Transcendentné funkcie. Sem patria predovšetkým goniometrické, hyperbolické funkcie

$$y = a.th(bx) \quad (2.39)$$

Elektronický obvod ktorého chovanie je najbližšie transcendentným funkciám je diferenčný zosilňovač.

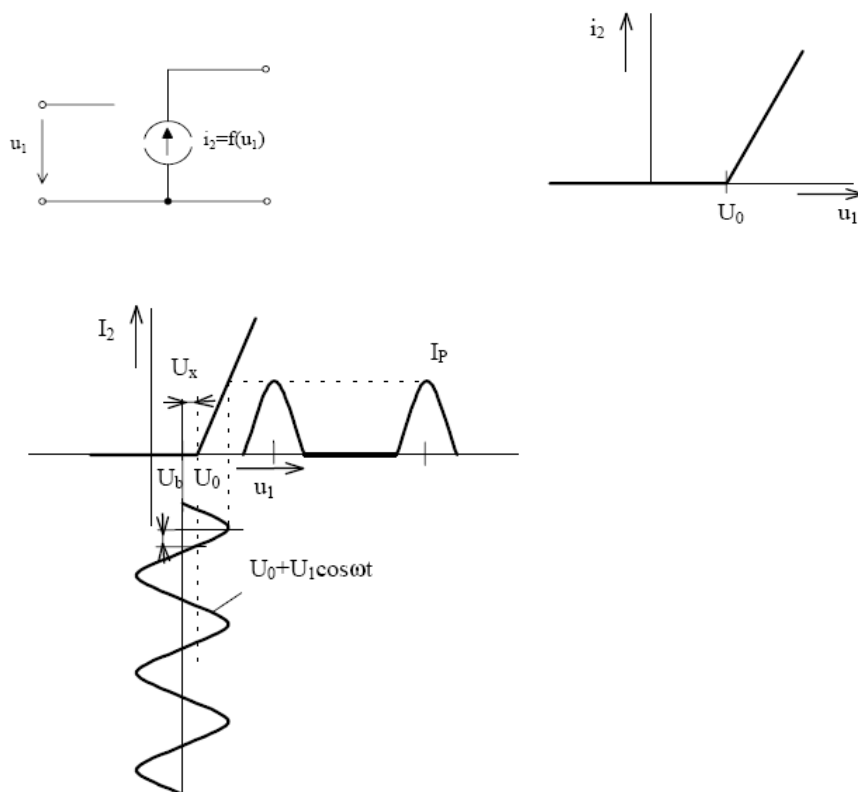
## 2.8. Modely vybraných nelineárnych prvkov

Princípy činnosti jednotlivých elektronických prvkov sú podrobne analyzované v [10], [3]. Výsledkom fyzikálnej analýzy sú modely jednotlivých prvkov, ich nelineárnych zjednodušení vyjadrenia vhodné pre analýzu zložitejších obvodov v súlade so závermi predchádzajúcej kapitoly budú opísané v ďalšej časti.

## 2.8.1. Po častiach lineárny zdroj s jedným bodom nespojitosti

Predpokladajme model riadeného zdroja podľa obr. 2.4 (Jednoduchý model tranzistora)

Tento model je najjednoduchším opisom chovania tranzistora ako napätím riadeného prúdového zdroja. Tento zdroj je uzavretý pokiaľ vstupné napätie neprekoná napätie kolena prechodu báza-emitor.



Obr. 2.4 Model po častiach lineárneho riadeného zdroj a priebeh skresleného výstupného prúdu

Vyšetrojeme vstupný prúd keď na vstup privádzame harmonický signál  
 $U_1 = U_0 + U_1 \cos \omega t$

Vstupný prúd je určený vzťahom, kde  $G$  je strmosť.

$$I_p = (U_1 - U_x)G$$

$$\cos \varphi = \frac{U_x}{U_1}$$

Potom možno prúd  $i$  vyjadriť Fourierovým radom

$$i_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \cdot \cos \omega_0 t \quad (2.40)$$

kde jeho koeficienty sú určené transformačným vzťahom



$$I_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2\pi}\varphi}^{+\frac{T}{2\pi}\varphi} \cos(\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} \cos(\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) d\omega_0 t \quad (2.41)$$

Príkladom takéhoto prvku s jedným bodom zlomu je aj ideálna dioda. Používa sa aj pre charakterizovanie vlastností obvodu opísaného po častiach lineárnymi úsekmi. Jej chovanie môžeme vyjadriť dvoma stavmi:

-Dioda je otvorená. Napätie na diode je  $U_D=0$ . Prúd v kladnom smere je určený obvodom  $I_D \geq 0$

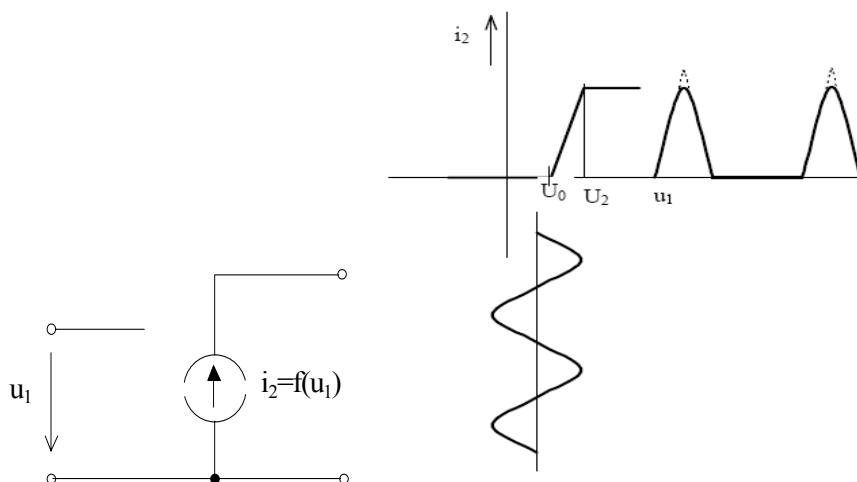
-Dioda je uzavretá. Prúd diodou je  $I_D=0$ . Napätie je v zápornom smere určené zvyšným obvodom  $U_D \leq 0$ .

Koeficienty Fourierovho rozvoja sú

$$\begin{aligned} G.U_1 &= \frac{I_p}{1 - \cos \varphi} \\ G.U_x &= \frac{I_p \cdot \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \\ I_1 &= \frac{I_p}{\pi} \frac{\varphi - \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \\ I_0 &= \frac{I_p}{\pi} \frac{\sin \varphi - \varphi \cdot \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \\ I_n &= \frac{I_p}{\pi} \frac{\cos \varphi \sin n\varphi - n \sin \varphi \cdot \cos n\varphi}{(1 - \cos \varphi)n(n^2 - 1)} \end{aligned} \quad (2.42)$$

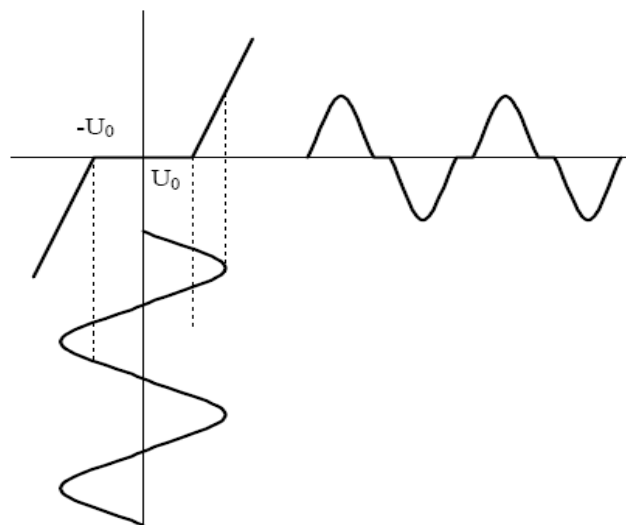
## 2.8.2 Viacsegmentový po častiach lineárny model riadeného zdroja

Pri veľkom vstupnom signále prakticky všetky zdroje sú obmedzené saturáciou. Tento jav možno vyjadriť ďalším segmentom v prevodovej charakteristike napätím riadeného zdroja (obr.2.5)



Obr. 2.5 Po častiach lineárny riadený zdroj s dvoma bodmi zlomu

Zosilňovače triedy B a triedy C majú charakteristiku pre jednu polohu obdobnú hore uvedenej. Ak pracujú dvojčinne so zlým prepojením počiatkov bude charakteristika riadeného zdroja (obr. 2.6. ).



Obr.2.6 Po častiach lineárna prenosová charakteristika a výstupný priebeh prúdu

Obecnú lineárnu závislosť možno vždy aproximovať po častiach lineárnymi úsekmi. Pre takúto charakterizáciu potrebujem uviesť dva nutné údaje:

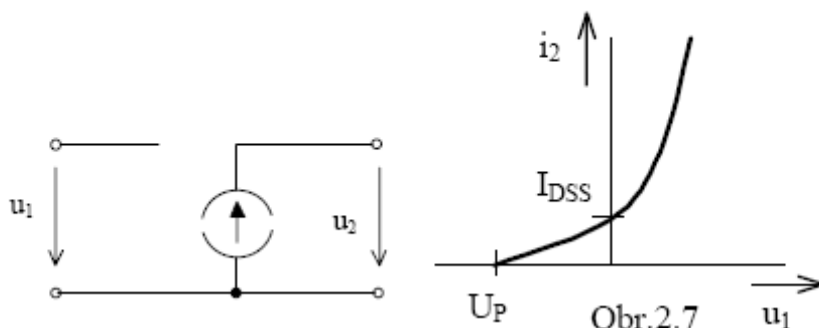
- Rovnicu priamky charakterizujúcu túto nelineárnu závislosť v príslušnom intervale nezávislej premennej.
- Interval nezávislej premennej v rámci, ktorého platí táto lineárna náhrada.

Tieto údaje v celom rozsahu nezávislej premennej umožnia pri výpočte vychádzajúc z počiatkových podmienok urobiť linearizovanú náhradu celého obvodu. Pomocou iterácií alebo riešením sústavy diferenciálnych rovníc numerickou integráciou dostaneme

hodnoty elektrických veličín v ďalšom kroku. Pre tieto hodnoty podľa intervalov platnosti urobíme novú.

### 2.3.3. Napätím riadený zdroj s kvadratickou závislosťou

Charakterizujeme ňou činnosť pol'om riadeného tranzistora v oblasti nasýtenia. Kanál medzi emitorom a kolektorom je priškrtený (pinch-off režim).



Obr.2.7. Prevodová charakteristika unipolárneho tranzistora

Charakteristika pol'om riadeného tranzistora v oblasti nasýtenia.

$$i_2 = \begin{cases} I_{DSS} \left(1 - \frac{u_1}{U_p}\right)^2, & u_1 > U_p \\ 0 & u_1 < U_p \end{cases} \quad \text{ochudobňovaný mód} \quad \frac{\beta}{2} = I_{DSS} \quad (2.43)$$

Podmienka platnosti modelu  $u_2 > (u_1 - U_p)$ . Pri tranzistoroch v ochudobňovacom mode je  $I_{DSS}$  prúde kolektora pri  $u_1 = 0$ .

V oblasti otvoreného kanálu kedy pre napätie kolektor emitor  $u_2$  platí podmienka:  $0 < u_2 < u - U_p$  je výstupná charakteristika určená vzťahom.

$$i_2 = \frac{2I_{DSS}}{U_p^2} \left[ (u_1 - U_p)u_2 - \frac{u_2^2}{2} \right] = \frac{\beta}{U_p^2} \left[ (u_1 - U_p)u_2 - \frac{u_2^2}{2} \right] \quad (2.44)$$

Táto oblasť sa využíva ako napätím riadený odpor s jeho inverznou hodnotou.

$$R_D^{-1} = \frac{di_D}{du_2} \Big|_{u_2=0} = \frac{2I_{DSS}}{U_p^2} (u_1 - U_p) = \frac{\beta}{U_p^2} (u_1 - U_p) \quad (2.45)$$

Táto oblasť má praktické použitie pre zmiešavanie a zmenu zisku pomocou zmeny odporu. Efekt napätím riadenej zmeny možno využiť len pre malé signály  $u_2 \approx 0$ .

Predpokladajme budenie pol'om riadeného tranzistora harmonickým signálom v oblasti saturácie  $u_1 = U_b + U_1 \cos \omega t$ . Ak je splnená podmienka  $U_b - U_1 > U_p$  tranzistor pre všetky

okamžitú hodnotu budiaceho signálu zotrúva v tejto oblasti. Tento spôsob budenia má jedine praktický zmysel pri zosilňovaní signálu.

$$i_2 = I_{DSS} \left( 1 - \frac{U_b + U_1 \cos \omega t}{U_p} \right)^2$$

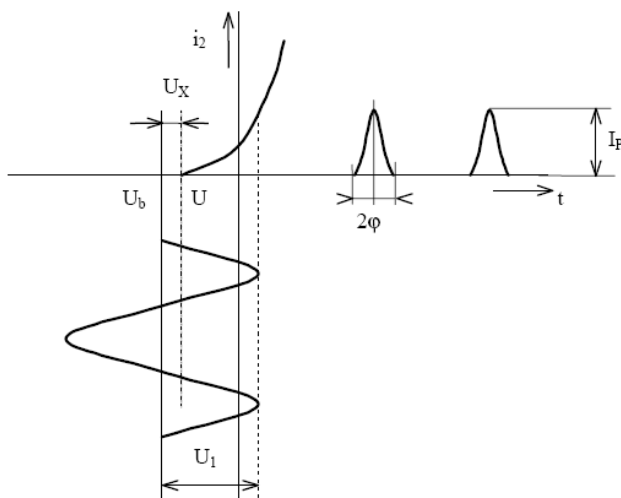
$$i_2 = I_{DSS} \left( 2 - \frac{2U_b}{U_p} + \frac{U_b^2 + U_1^2}{U_p^2} \frac{1}{2} \right) - \frac{2I_{DSS}U_1}{U_p^2} (U_p - U_b) \cos \omega t + I_{DSS} \frac{U_1^2}{U_p^2} \cos 2\omega t \quad (2.46)$$

Odtiaľ diferenciálna strmosť a stredná hodnota strmosti ako pomer prvých harmonických budiaceho signálu a výstupného prúdu je určená koeficientom pri druhom člene výrazu je určená vzťahom.

$$G_m = g_m = -\frac{2I_{DSS}}{U_p^2} (U_p - U_b) = \frac{\beta}{U_p^2} (U_p - U_b) \quad (2.47)$$

Tento vzťah určuje na jednoduchú možnosť riadenia strmosti jednosmerným pracovným bodom predstavovaným napätím  $U_b$ .

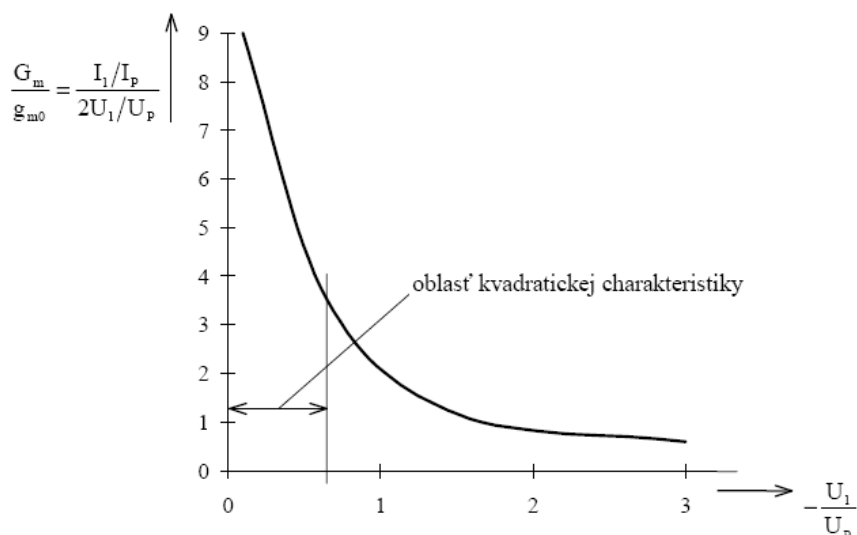
Ak dôjde k uzatváraniu zdroja prúdu bude mať výstupný prúd  $i_2$  nekonečne veľa zložiek. Pre ich výpočet je značne zložitý. Pre určenie medzí vo Fourierovom integrále potrebujeme poznať uhol otvorenia  $\varphi$ .



Obr.2.8. Skreslenie výstupného prúdu unipolárneho tranzistora ak dochádza k jeho uzatváraniu

$$\varphi = \arccos \frac{U_x}{U_1}; \quad U_x = U_p - U_b$$

Napätie  $U_x$  vyjadruje posunutie jednosmernej zložky budiaceho harmonického napätia  $U_b$  voči prahovému napätiu  $U_p$ . Špičková hodnota prúdu kolektora je  $I_p$



Obr. 2.9 Pomer strednej a diferenciálnej strmosti unipolárneho tranzistora pri uzatváraní kanálu

Výstupný prúd  $i_2$  je určený Fourieovým radom

$$i_2 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \cos \omega_0 t \quad (2.48)$$

kde koeficienty sú určené vzťahmi:

$$I_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2\pi}\varphi}^{\frac{T}{2\pi}\varphi} I_{DSS} \left( 1 - \frac{U_b + U_1 \cos \omega_0 t}{U_p} \right)^2 \cos n \omega_0 t dt$$

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2\pi}\varphi}^{\frac{T}{2\pi}\varphi} I_{DSS} \left( 1 - \frac{U_b + U_1 \cos \omega_0 t}{U_p} \right)^2 dt \quad (2.49)$$

Pre malý rozkmit signálu možno charakterizovať tranzistor v oboch oblastiach lineárnym zdrojom so strmosťou (diferenciálna strmosť).

$$g_m = \frac{\partial i_2}{\partial u_1} = \frac{-2I_{DSS}}{U_p^2} (U_p - U_1) \quad (2.50)$$

Vďaka vysokej vstupnej impedancii to predstavuje prírastkový model (model pre malý signál) napätím riadený prúdový zdroj so strmosťou  $g_m$ .

1. Stredná hodnota strmosti pre oblasť kedy nedôjde k uzatváraniu tranzistora charakterizovaného podmienkou  $(U_b - U_1 > U_p)$  je zhodná s diferenciálnou strmosťou (2.29). V prípade, že nárast amplitúdy  $U_1$  vstupného signálu spôsobí uzatváranie

tranzistor táto rovnosť sa poruší. Pomer strednej hodnoty strmosti  $G_m(U_1)$  k diferenciálnej strmosti  $g_m$  je ukázaný na obr.2.8.

## 2.8.4 Exponenciálna charakteristika

Pre bipolárne tranzistory redstavuje veľmi dobrú aproximáciu prúdu pretekajúceho dopredne polarizovaným P-N priedchodom báza - emitor. Tento model je zjednodušením Ebers-Mollovho modelu pre veľký signál. Prúd  $I_s$  predstavuje saturačný prúd emitora a napätie  $U_1$  vstupné napätie priedchodu báza-emitor. Prúd emitora  $i_2$  je určený vzťahom:

$$i_2 = I_s e^{\frac{U_{1q}}{kT}} = I_s e^{\frac{U_1}{U_T}} \quad (2.51)$$

kde  $k$  je Boltzmanova konštanta,  $T$  je absolútna teplota. Termálne napätie  $U_T=26\text{mV}$  pri izbovej teplote 300K.

Ak privádzame na vstup signál  $U_b+u_1(t)$  s jednosmernou polarizáciou  $U_b$  bude prúd emitora bude určený výrazom. Výraz v hranatej zátvorke sa získa

$$i_2(t) = I_s e^{\frac{U_b}{U_T}} e^{\frac{u_1(t)}{U_T}} = \left| \frac{ak}{U_T} \right| \ll 1 = I_s e^{\frac{U_b}{U_T}} \left[ 1 + \frac{u_1(t)}{U_T} \right] = I_{dc} + i(t) = I_{dc} + \frac{g_m u_1(t)}{\alpha}$$

nahradíme exponenciálu prvými dvoma členmi Taylorovho radu.

$$i_2(t) = I_s e^{\frac{U_b}{U_T}} \left[ 1 + \frac{u(t)}{U_T} \right] = I_{dc} + i(t) = I_{dc} + \frac{g_m u(t)}{\alpha} \quad (2.52)$$

Potom tento lineárny model možno nahradiť strmost'ou (diferenciálna strmost')

$$g_m = \frac{di_c(t)}{du_1} = \frac{di_2(t)}{du(t)} \alpha = I_{dc} \frac{\alpha}{U_T} \quad (2.53)$$

Uvážme harmonický budiaci signál na vstupe  $u_1(t) = U_b + U_1 \cos \omega t$

$$i_2(t) = I_s e^{\frac{U_b}{U_T}} \cdot e^{\frac{U_1 \cos \omega t}{U_T}} = I_{dc} \cdot e^{x \cos \omega t} \quad (2.54)$$

Maximálna hodnota výstupného prúdu  $I_p$  je

$$I_p = I_s e^{\frac{U_b}{U_T}} e^x = I_{dc} e^x \quad (2.55)$$

Výstupný priebeh možno charakterizovať Fourierovým radom

$$i_2(t) = I_{dc} e^{x \cos \omega t} = \frac{I_p}{e^x} e^{x \cos \omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n \omega t \quad (2.56)$$

Koeficienty Fourierovho radu sú

$$C_0 = \frac{I_p}{e^x} \left( \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{x \cos \omega t} dt \right) = \frac{I_p}{e^x} I_0(x)$$

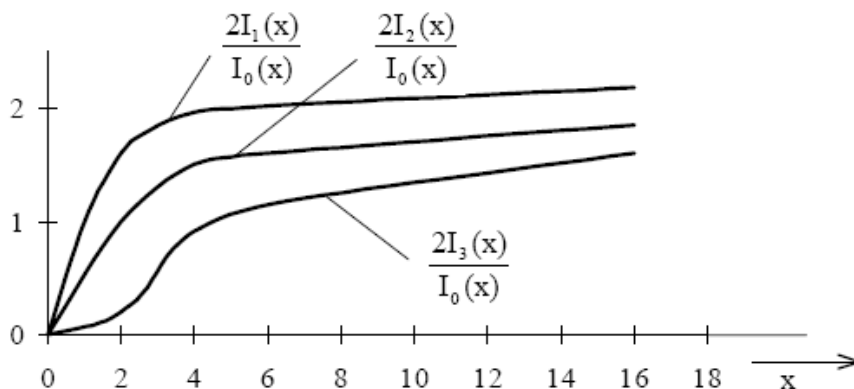
$$C_n = \frac{I_p}{e^x} \left( \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{x \cos \omega t} \cos n \omega t dt \right) = \frac{I_p}{e^x} I_n(x) \quad (2.57)$$

kde  $I_0(x)$ ,  $I_n(x)$  sú modifikované Besselové funkcie rádu  $n$  argumentu  $x$ .

Platí, že  $C_0 = \frac{I_p}{e^x} I_0(x) = I_{dc} I_0(x) = I_{DC}$  sa rovná celkovej hodnote jednosmerného prúdu emitora pre budenie vstupu známou amplitúdou vstupného napätia  $U_1$ . Jednosmerný emitový prúd  $I_{dc}$  predstavuje jednosmernú zložku v prípade nulovej amplitúdy budiaceho signálu. Rozdiel medzi týmito hodnotami je to spôsobený tvarovou deformáciou spracovávaného harmonického priebehu tak typickou pre nelineárne obvody.. Kladné polvlny sú zosilné a záporné obmedzené. Následkom tejto nesymetrickej tvarovej deformácie je posun jednosmernej zložky výsledného priebehu úmernej činiteľu  $I_0(x)$ . Besselova funkcia  $I_0(x)$  v súlade s fyzikálnym princípom rastie pri náraste budiaceho signálu  $x$ . Pre  $x=0$  je zase prúd  $I_{DC}=I_{dc}$ . Pre prúd  $i_2(t)$  možno písať:

$$i_2(t) = I_{DC} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2I_n(x)}{I_0(x)} \cos n \omega t \right] \quad (2.58)$$

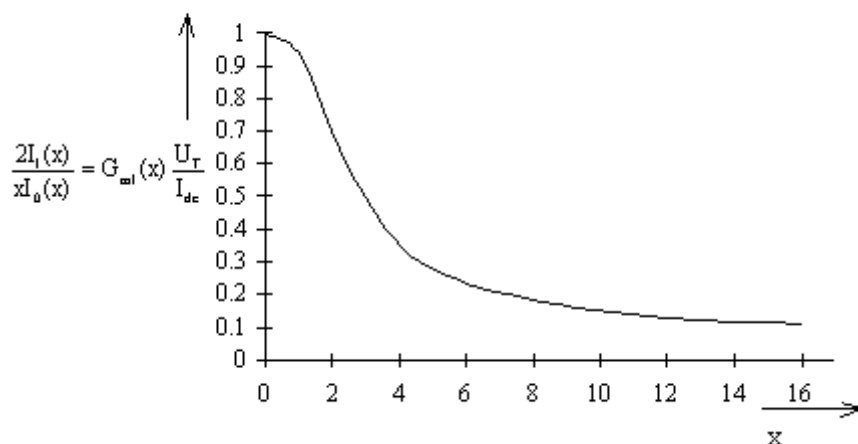
Priebehy modifikovaných Besselových funkcií vzťahnutých na  $I_0(x)$  sú na obr.2,11.



Obr.2.10 Priebeh jednotlivých harmonických výstupného prúdu bipolárneho tranzistora

Stredná strmosť určená pomerom prvých harmonických v spektre skresleného výstupného signálu je daná vzťahom

$$G_m(x) = \frac{\alpha I_1}{U_1} = \frac{\alpha I_{DC}}{U_T} \frac{2I_1(x)}{x I_0(x)} \quad (2.60)$$

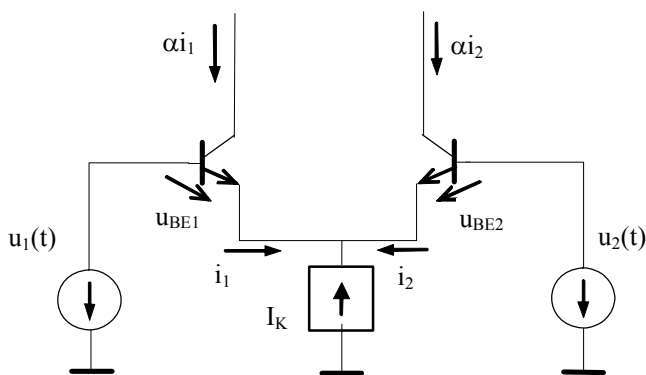


Obr. 2.11 Priebeh strednej strmosti bipolárneho tranzistora

### 2.8.5. Charakteristika diferenčného stupňa

Diferenčný stupeň si možno predstaviť ako aktívny prvok (blok) s dvoma rovnocennými vstupmi, ktorý vďaka svojej symetrii zabezpečuje nulovému signálu na vstupe nulové rozdielové napätie. Symetria zabezpečuje, že negatívne tepelné pôsobenia na obidva tranzistory sa vzájomne kompenzujú.

Schéma difrenčného dvojice ako kľúčového prvku diferenčného zosilňovača je na obr. 2.13.



Obr. 2.13 Schéma diferečnej dvojice

Prúdy emitorov sú

$$i_1 = I_{S1} e^{\frac{U_{BE1}}{U_T}} ; \quad i_2 = I_{S2} e^{\frac{U_{BE2}}{U_T}} \quad (2.61)$$

predpokladajme  $I_{S1} = I_{S2} = I_S$ , celkový prúd je rovný  $i_1 + i_2 = I_K$ .

potom



$$\frac{i_1}{i_2} = e^{\frac{u_1 - u_2}{U_T}} = e^z \quad \text{a} \quad z = \frac{u_1 - u_2}{U_T} \quad (2.62)$$

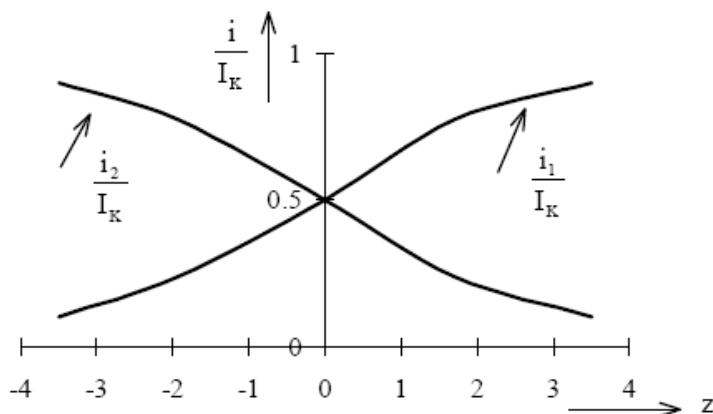
odtiaľ

$$i_1 = \frac{I_k}{1 + e^{-z}} \quad ; \quad i_2 = \frac{I_k}{1 + e^z} \quad (2.63)$$

Z analýzy týchto vzťahov určíme, že prúdy  $i_1, i_2$  majú kladnú symetriu okolo hodnoty  $I_k/2$ . Odchýľka od tejto hodnoty predstavuje diferenčný prúd  $i$ . (Obr.2.14.)

$$i = \frac{i_1 - i_2}{2} = \frac{I_k}{2} \left[ \frac{1 - e^{-z}}{1 + e^{-z}} \right] = \frac{I_k}{2} \operatorname{tgh}\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{I_N}{2} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (2.64)$$

$$i_1 = \frac{I_k}{2} + i \quad ; \quad i_2 = \frac{I_k}{2} - i$$



Obr 2.14 Prenosová charakteristika diferenčného stupňa

Výraz pre  $\operatorname{tgh} \frac{z}{2}$  možno aproximovať Maclaurinovým radom

$$i = \frac{I_k}{2} \left[ \operatorname{tgh} \frac{z}{2} \right] = \frac{I_k}{2} \left[ \frac{z}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{z}{2} \right)^3 + \frac{1}{15} \left( \frac{z}{2} \right)^5 - \dots \right] \quad (2.65)$$

Pre  $z \ll 1$  tj v prípade  $(u_1 - u_2) < 26$  mV možno výraz (2.46) aproximovať prvým členom radu (2.47).

$$i = \frac{I_k}{2} \left[ \frac{x}{2} \cos \omega t - \frac{x^3}{24} \cos^3 \omega t + \dots \right] = \frac{I_k}{2} \left[ \left( \frac{x}{2} - \frac{x^3}{32} \right) \cos \omega t - \frac{x^3}{96} \cos 3\omega t \right] \quad (2.66)$$

Porovnaním výrazov v rovnici dostaneme

$$i(t) = \frac{I_k}{2} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2} \cos \omega t\right) = I_k \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}(x) \cos(2n+1)\omega t \quad (2.67)$$

Výraz predstavuje strmosť diferenciálneho prúdu emitora  $i$ . Potom vstupná dynamická vodivosť diferenciálneho vstupu je určená výrazom.

$$a_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2} \cos \phi\right) \right] \cos(2n+1)\phi d\phi = \frac{I_{2n+1}}{I_k} \quad (2.68)$$

Vstupnú impedanciu si možno preto predstaviť ako sériové zapojenie vstupných vodivostí jednotlivých tranzistorov. Preto, že vstupom je báza s  $\beta$ -krát menším prúdom ako tečie emitorom, vodivosť jedného tranzistora je

$$g_m = \frac{\alpha di}{d(u_1 - u_2)} = \frac{\alpha I_k}{4U_T} \quad (2.69)$$

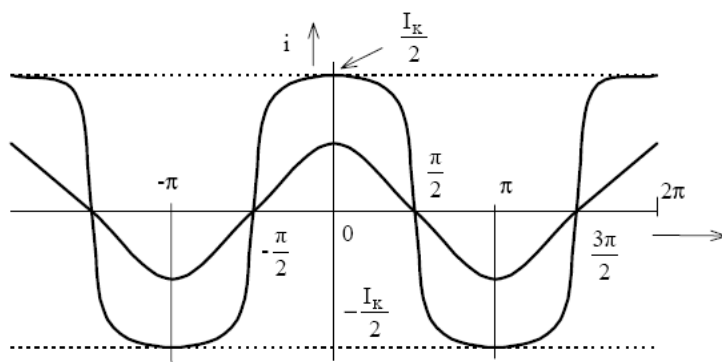
Strmosť diferenciálneho prúdu kolektora  $D_i = \alpha D_{i_m}$  označíme výrazom  $g$ , kde

$$g_{\text{vst}} = \frac{g_{\text{in}}}{2} = \frac{di(1-\alpha)}{d(u_1 - u_2)} = \frac{1-\alpha}{\alpha} g_m = \frac{I_k}{4U_T(\beta+1)} \quad (2.70)$$

Ak vstupný harmonický signál v tvare  $u-u = U \cos \omega t$  definujeme opäť

$$G_{M1}(x) = \frac{\alpha I_1}{(U_1 - U_2)} = \frac{4\alpha I_k a_1(x)}{4U_T(U_1 - U_2)} U_T = 2\alpha g_{\text{in}} \frac{a_1(x)}{x} = g_m \frac{4a_1(x)}{x} \quad (2.71)$$

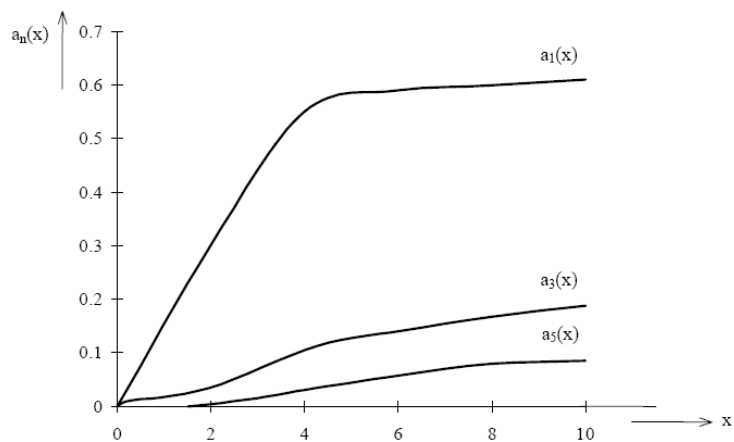
Diferenčný prúd emitorov je určený Fourierovým rozkladom výrazu (2.67)



Obr. 2.15 Skreslenie výstupného prúdu v závislosti od amplitúdy vstupného signálu

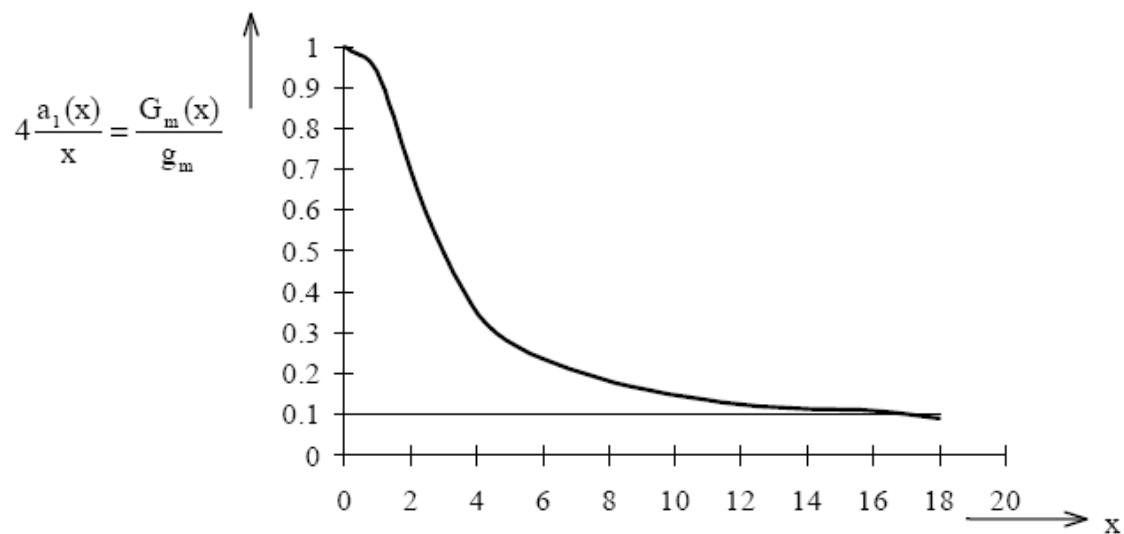
Párne členy tohto radu sú nulové (symetrická deformácia tvaru diferenciálneho prúdu  $D_i$ ). Nepárne koeficienty  $a(x)$  sú určené integrálom.

Po aproximovaní funkcie  $\operatorname{th}()$  prvými dvoma členmi radu dostaneme po integrovaní pre koeficient prvej harmonickej pre prípad  $x > 0.63$  odchýlka od lineárnej závislosti určenej výrazom (2.48) prekročí hranicu 2.5 %. Závislosť  $a_{2n+1}(x)$  je na obr. 2.16



Obr. 2.16 Amplitúdy jednotlivých harmonických zložiek výstupného prúdu

Potom závislosť strednej strmosti v závislosti od  $x$  normovaná k hodnote dynamickej strmosti  $g_m$  je na Obr.2.17.



Obr.2.17 Pomer strednej a diferenciálnej strmosti diferenčného stupňa