

1 A/D A D/A PREVODNÍKY NA BÁZE SIGMA-DELTA MODULÁCIE

1.1 ÚVOD

Medzi základné bloky, ktoré spájajú číslicový signálový procesor s externým prostredím sú **A/D** a **D/A** prevodníky. **Presnosť** týchto prevodníkov je v praktických aplikáciách často limitujúcim faktorom. Zvyšovanie presnosti A/D a D/A, ktoré využívajú **konvenčné princípy** (paralelné, s postupnou aproximáciou, integračné ...) je spojené s nárastom zložitosti a tým aj s nárastom ceny. Z pohľadu technológie VLSI a možnosti vytvárania vysoko integrovaných systémov ČSS je značným problémom **nekompatibilita** číslicovej VLSI technológie a presnej analógovej technológie, ktorá je potrebná na integráciu konvenčných A/D a D/A prevodníkov. Prevodníky na báze **sigma-delta** modulácie sú cenovo efektívnou alternatívou ku konvenčným prevodníkom predovšetkým pre prevodníky s vyšším rozlíšením (>12 bitov), pričom ich vlastnosti sú plne kompatibilné s technológiou VLSI¹. Tieto prevodníky sa stali dominantné predovšetkým v oblasti audio a telekomunikačných aplikáciách.

Medzi výhody sigma-delta prevodníkov patria:

- Kompatibilita s technológiou VLSI (90 % obvodov prevodníka je realizovaných číslicovou technikou), čo umožňuje integráciu týchto prevodníkov spolu s obvodmi DSP na jednom čipe².
- Nízka cena týchto prevodníkov vychádza predovšetkým z predchádzajúcej vlastnosti, prispieva však k nej aj skutočnosť, že zvyšná časť analógových obvodov nevyžaduje vysokú presnosť (nie sú nevyhnutné presné obvody ani laserové trimovanie).
- Vysoká linearita je garantovaná princípom činnosti.
- Podstatne nižšie nároky na vstupný (obmedzovací) a výstupný (rekonštrukčný) analógový filter³, ktoré sú zvyčajne súčasťou kompletného systému ČSS.

¹ Základný princíp sigma-delta prevodníkov bol opísaný už v roku 1962 avšak ich praktické využitie bolo možné až po dosiahnutí pokroku v technológií VLSI, ktorý umožnil praktickú realizáciu týchto prevodníkov.

² Integrácia konvenčných prevodníkov na jednom čipe s mikroprocesormi je veľmi problematická (číslkové obvody procesora sú z hľadiska konvenčných prevodníkov zdrojom rušenia). V oblasti jednočipových procesorov je tak možné nájsť typicky 10-bitové (zriedkavo 12-bitové) konvenčné A/D a D/A prevodníky.

Tieto vlastnosti sigma-delta prevodníkov sú prakticky opakom nevýhodných vlastností konvenčných prevodníkov, čo im zabezpečuje široké možnosti využitia.

Základnou nevýhodou sigma-delta prevodníkov je ich relatívne **nízka výstupná frekvencia vzorkovania**, čo obmedzuje ich využitie v systémoch ČSS s maximálnou frekvenciou vzorkovania rádovo 100ky KHz⁴.

1.2 KONVENČNÉ (NYQUISTOVE) A/D PREVODNÍKY

Všeobecná štruktúra A/D prevodníka je znázornená na nasledujúcom obrázku.

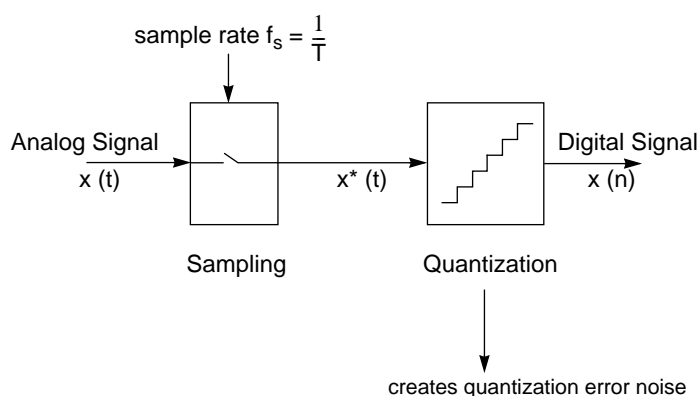


Figure 2-1 Generalized Analog-to-Digital Conversion Process

Signál $x(t)$ je vstupný analógový signál, $x^*(t)$ je signál diskretný v čase a spojitý v amplitúde, pričom platí

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT) \quad (1)$$

pričom

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Pomocou kvantizátora je signál $x^*(t)$ vyjadrený (aproximovaný) číslicovým signálom $x(n)$.

³ V praktických aplikáciách sa často dokonca tieto filtre redukujú na jednoduchý RC obvod, čo je oproti zložitým analógovým filtrom potrebným pre konvenčné A/D a D/A prevodníky extrémne zjednodušenie.

⁴ Tieto frekvencie sú dostatočné pre vzorkovanie rečových signálov v telekomunikačných aplikáciách ako aj pre najnáročnejšie audio aplikácie.

Väčšina A/D prevodníkov môže byť zaradená do jednej z dvoch skupín:

- 1) **Nyquistove prevodníky**⁵ (Nyquist rate converters) – ktoré konvertujú analógový signál $x(t)$, ktorý je frekvenčne obmedzený a obsahuje frekvenčné zložky od 0 až po Nyquistovu frekvenciu

$$f_N = \frac{f_s}{2} \quad (1)$$

- 2) **Prevodníky s prevzorkovaním** (oversampling converters) – ktoré realizujú vzorkovanie s frekvenciou $F_s \gg f_N$, pričom F_s je frekvencia vzorkovania na vstupe⁶ prevodníka. Pomer $P = F_s / f_s$ je v prakticky využívaných prevodníkoch 64, 128 prípadne i vyšší.

Pre funkciu Nyquistových A/D prevodníkov je podstatný obvod obmedzovacieho analógového filtra (antialiasing filter), ktorý má za úlohu obmedziť⁷ spektrum signálu $x(t)$ maximálne do frekvencie F_N . Jeho zapojenie v prípade konvenčného A/D prevodníka dokumentuje nasledujúci obrázok

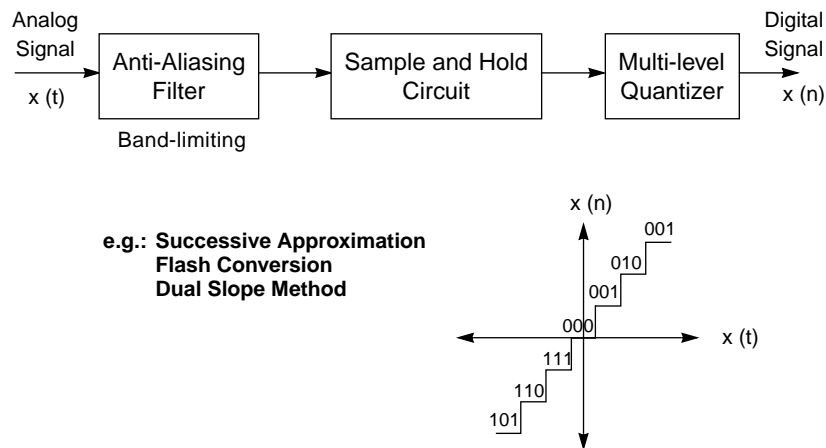


Figure 2-2 Conventional Analog-to-Digital Conversion Process

a vplyv obmedzovacieho filtra na spektrá signálov $x(t)$ a $x^*(t)$ je vidieť z nasledujúcich obrázkov.

⁵ Práve do tejto kategórie je možné zaradiť konvenčné A/D prevodníky.

⁶ AD prevodníky s prevzorkovaním poskytujú výstupné vzorky $x(n)$ s frekvenciou f_s a teda z pohľadu výstupných vzoriek sú kompatibilné s Nyquistovými prevodníkmi.

⁷ Aby bol splnený vzorkovací teorém.

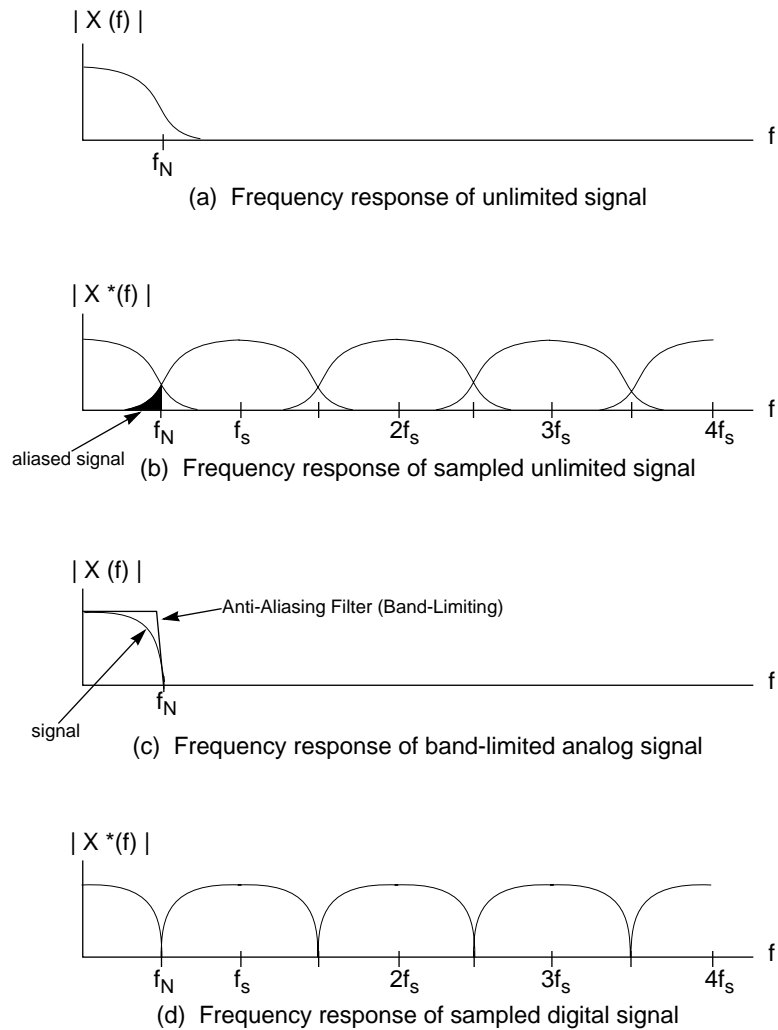


Figure 2-3 Spectra of Analog and Sampled Signals

Práve požiadavky na obmedzovací filter (strmosť, lineárna fázová charakteristika, ...) sú z pohľadu technickej realizácie kritické. Napr. v prípade 16-bitového A/D prevodníka je potrebné v pásme tlmenia dosiahnuť útlm viac približne 96 dB. Ak je navyše požadované pásmo priepustnosti do $f_p = 22000 \text{ Hz}$ pri frekvencii vzorkovania $f_s = 48000 \text{ Hz}$, je technická realizácia analógového filtra extrémne náročná a nákladná, čo znamená, že je v mnohých praktických aplikáciách prakticky nerealizovateľná.

Klasický spôsob prevodu vyžaduje navyše vzorkovací obvod typu „sample & hold“, ktorý musí zabezpečiť konštantnú úroveň signálu na výstupe obvodu počas celej doby prevodu. Ak zvažujeme, že pre 16-bitový A/D prevodník so vstupným dynamickým rozsahom 2 V je rozdiel medzi susednými kvantizačnými úrovňami

$$\frac{2V}{2^{16}-1} \doteq 30 \mu V$$

čo je mimo možností klasickej technológie VLSI. Samozrejme je možné použiť nové techniky ako napr. laserové trimovanie alebo samokalibráciu, tieto techniky však výrazne zvyšujú cenu výsledného čipu.

1.3 KVANTIZAČNÁ CHYBA A/D PREVODNÍKA

A/D prevod realizuje prevod analógového signálu $x(t)$ (ktorý má nekonečný počet úrovní) na číslicový signál $x(n)$, ktorý má len konečný počet hodnôt. Tento proces je charakterizovaný kvantizačnou chybou

$$e(n) = x(n) - x^*(t) \quad (2)$$

ktorá je porovnateľná s hodnotou zodpovedajúcou LSB bitu. Za predpokladu, že signál $x(n)$ je normovaný tak, že platí⁸

$$|x(n)| \leq 1 \quad (3)$$

a je vyjadrený pomocou B bitov (vrátane znamienka), je vzdialenosť medzi susednými kvantizačnými úrovňami daná vzťahom

$$q = \frac{1}{2^{B-1}} \quad (4)$$

a vzorkovaná hodnota $x^*(t)$ je zaokrúhľená na najbližšiu kvantizačnú úroveň, čo dokumentuje nasledujúci obrázok

⁸ Takto normovaný signál je možné vyjadriť v zlomkovom (frakčnom) formáte.

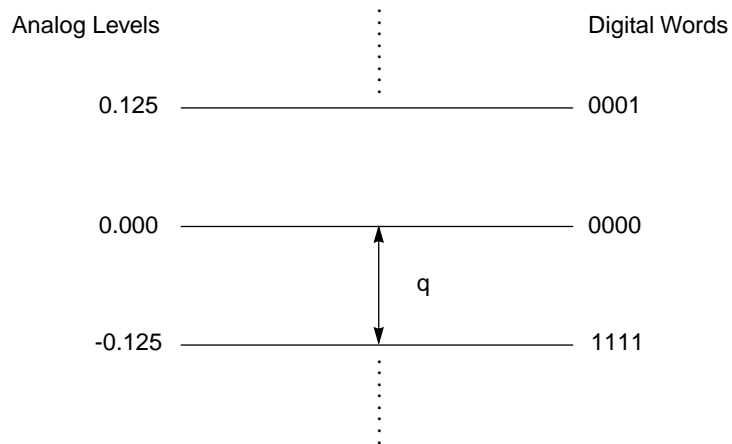


Figure 3-1 Quantization Error

V prípade, že amplitúda konvertovaného signálu $x(t)$ je podstatne väčšia ako kvantizačný krok q , je možné modelovať kvantizačnú chybu $e(n)$ ako náhodnú premennú s **rovnomerným rozložením** hustoty pravdepodobnosti. Pre výkon (disperziu) chybového signálu platí⁹

$$\sigma_e^2 = E[e^2] = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^2 de = \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2B}}{3} \quad (5)$$

pričom $E[]$ je operátor strednej štatistickej hodnoty. Nasledujúci obrázok zobrazuje spektrum kvantizačnej chyby, ktoré je rovnomerne rozložené v celom frekvenčnom pásme¹⁰

⁹ Pre ďalšie úvahy je dôležité uvedomiť si, že výkon kvantizačnej chyby **nezávisí od frekvenčného rozsahu A/D prevodníka**.

¹⁰ Vzhľadom na proces digitalizácie je frekvenčný interval $\langle 0, f_s \rangle = \langle 0, 2f_N \rangle$ ekvivalentný s intervalom $\langle -f_N, f_N \rangle$.

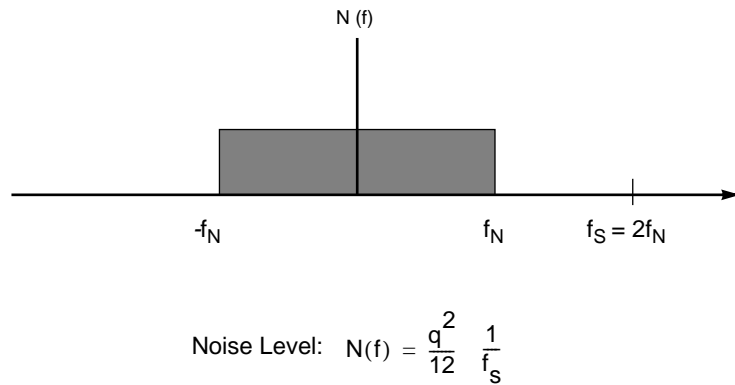


Figure 3-2 Noise Spectrum of Nyquist Samplers

a spektrálna výkonová hustota kvantizačnej chyby je v prípade konvenčného (Nyquistovho) prevodníka určená vzťahom¹¹

$$N(f) = \frac{q^2}{12(f_N - (-f_N))} = \frac{q^2}{12f_s} = \frac{2^{-2B}}{3f_s} \quad (6)$$

V prvom priblížení je možné modelovať kvantizačný šum ako aditívny šum s výkonom podľa vzťahu (5) a spektrálnou výkonovou hustotou podľa vzťahu (6). Tento model využijeme aj pri kvalitatívnej analýze sigma delta modulátora v ďalších kapitolách.

1.4 ZÁKLADY PREVZORKOVANIA A DECIMÁCIE

Kvantizačný proces v prevodníkoch s prevzorkovaním je v porovnaní s konvenčnými prevodníkmi výrazne odlišný. Konvenčné A/D prevodníky realizujú kvantovanie v jednom vzorkovacom intervale až na plnú presnosť. Prevodník s prevzorkovaním realizuje prevod vo viacerých stupňoch, pričom vstupné vzorky sú kvantované pomocou kvantizátora s hrubým rozlíšením (t.j. malým počtom kvantizačných úrovní) a vzorkované s vysokou vstupnou frekvenciou vzorkovania $F_s = Nf_s$. V ďalších stupňoch je počet kvantizačných úrovní postupne zvyšovaný a vzorkovacia frekvencia je postupne znižovaná (s využitím číslicovej decimácie) až na hodnotu f_s , čo je z pohľadu výstupných vzoriek **ekvivalentné** s konvenčnými prevodníkmi.

Veľmi zjednodušene je možné decimačný proces znázorniť na nasledujúcom obrázku.

¹¹ Táto hodnota je naopak závislá od frekvenčného rozsahu A/D prevodníka.

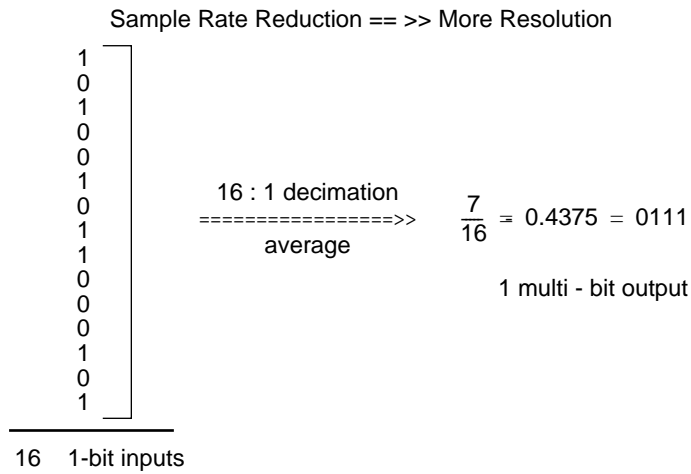


Figure 4-4 Simple Example of Decimation Process

Tento proces umožňuje pri znižovaní vzorkovacej frekvencie zvyšovať presnosť decimovaných výstupných vzoriek¹².

Decimálny proces navyše umožňuje znížiť v porovnaní s konvenčnými A/D prevodníkmi požiadavky na vstupný analógový obmedzovací filter, čo dokumentujú nasledujúce obrázky.

¹² Tento jednoduchý príklad však nevyužíva možnosti zvyšovania presnosti výstupných vzoriek, ktoré sú založené na sigma-delta modulácií.

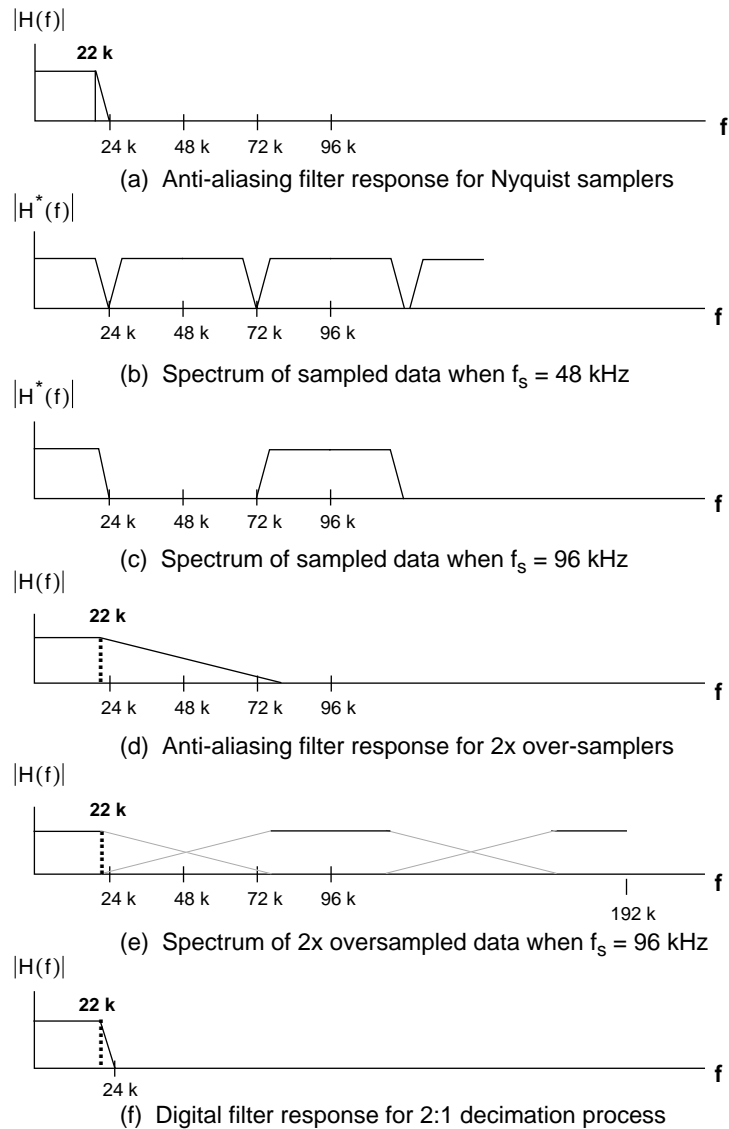


Figure 4-1 Comparison Between Nyquist Samplers and 2X Oversamples

Obrázok popisuje audio signál vzorkovaný s frekvenciou $2f_s = 96$ KHz (t.j. $P = 2$). Obmedzovací filter tak musí obmedziť signál nad frekvenciou 74 KHz, pričom filter musí mať rovnomernú charakteristiku až po frekvenciu $f_p = 22$ KHz. Šírka prechodového pásme je filtra je 52 KHz (od 22 KHz do 74 KHz) a dosiahnutie útlmu 96 dB v pásme tmenia je relatívne ľahko dosiahnuteľná. Pretože je požadovaná výstupná frekvencia vzorkovania, je potrebné využiť **decimačný filter**, ktorý realizuje decimačný proces v **číslicovej oblasti**.

Ďalšou zaujímavou vlastnosťou prevzorkovania je skutočnosť, že úroveň kvantizačného šumu v pásme $\langle -f_B, f_B \rangle$ ¹³ ktoré nás zaujíma je zobrazená na nasledujúcom obrázku

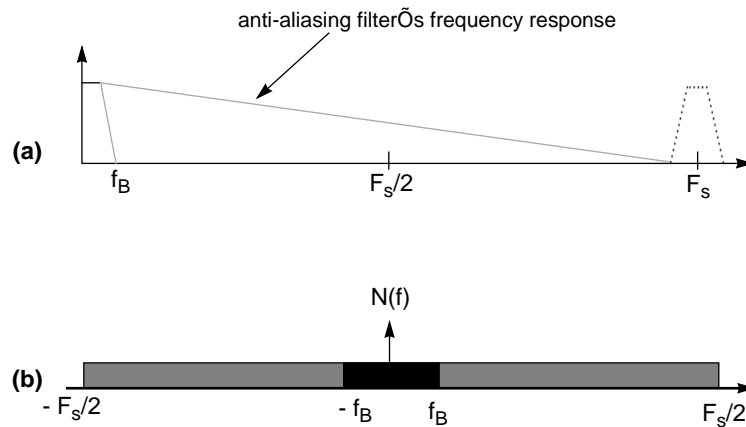


Figure 4-2 Anti-Aliasing Filter Response and Noise Spectrum of Oversampling A/D Converters

a určená vzťahom

$$N_B = \int_{-f_B}^{f_B} N(f) df = \frac{q^2}{12} \frac{2f_B}{F_s} \quad (7)$$

pričom spektrálna výkonová hustota $N(f)$ je určená vzťahom (6) a v prípade, že $f_B \ll F_s$ je podstatne nižšia ako v prípade konvenčných A/D prevodníkov.

1.5 DELTA MODULÁCIA

Princíp delta modulácie je všeobecne známy už od roku 1940 a je znázornený na nasledujúcom obrázku

¹³ V prípade porovnávania s konvenčnými A/D prevodníkmi platí $f_B = f_N$.

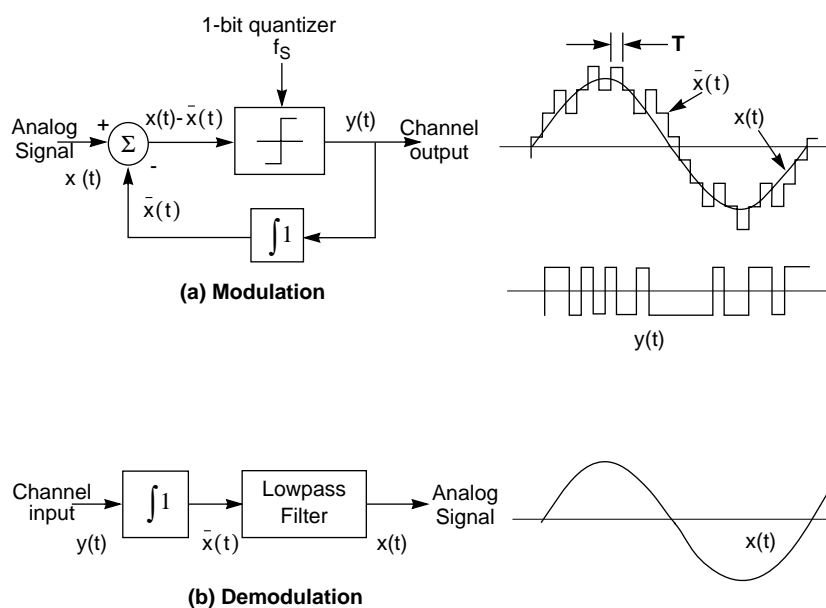


Figure 5-1 Delta Modulation and Demodulation

1.6 SIGMA-DELTA MODULÁCIA A TVAROVANIE SPEKTRA KVANTIZAČNÉHO ŠUMU

Sigma-delta modulátor je rozšírením delta modulátora, pričom princíp transformácie delta modulátora na sigma-delta modulátor je znázornený na nasledujúcom obrázku. Delta modulácia využíva dva integrátory. Pretože integrácia je lineárna operácia, je možné druhý integrátor presunúť pred modulátor bez vplyvu na celkovú činnosť dvojice modulátor-demodulátor.

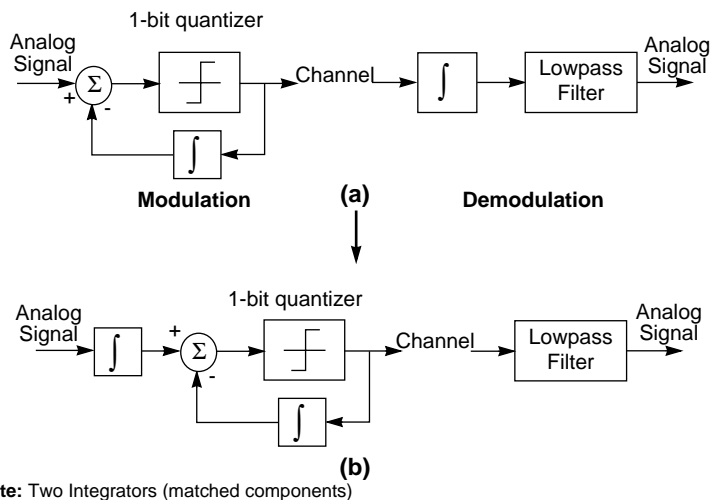


Figure 6-1 Derivation of Sigma-Delta Modulation from Delta Modulation

Naviac je možné integrátory presunúť za uzol a vytvoriť sigma-delta modulátor, ktorého štruktúra ako aj náhradný linearizovaný model¹⁴ sú znázornené na nasledujúcom obrázku.

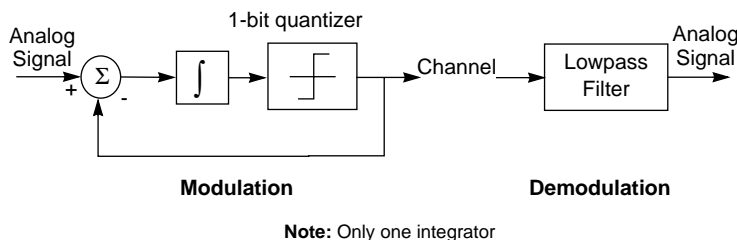


Figure 6-2 Block Diagram of Sigma-Delta Modulation

Vzhľadom na linearitu modelu a princíp superpozície je možné analyzovať vplyv sigma-delta modulátora na vstupný signál a kvantizačný šum samostatne, čo je realizované na nasledujúcom obrázku

¹⁴ Sigma-delta modulátor je zložitý nelineárny systém a náhradný lineárny model umožňuje kvalitatívne opísať len niektoré podstatné vlastnosti a je zvolený z dôvodu jednoduchosti.

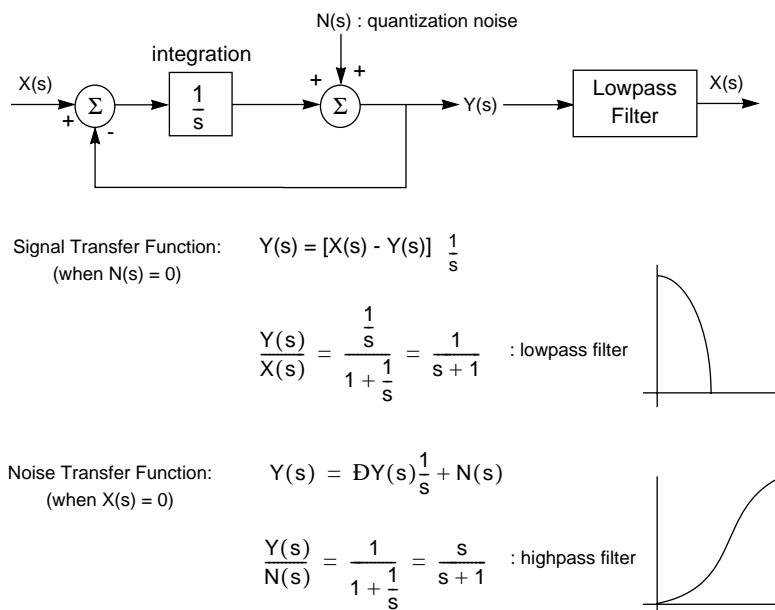
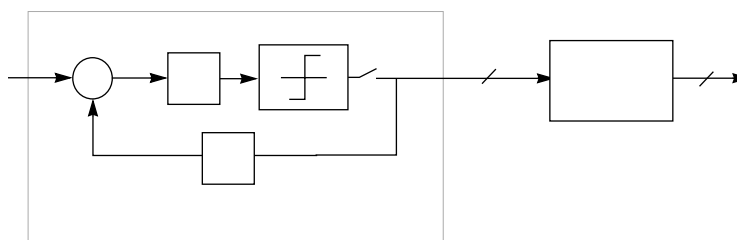


Figure 6-3 S-Domain Analysis of Sigma-Delta Modulator

Tento obrázok dokumentuje významnú vlastnosť sigma-delta modulátora. Z pohľadu vstupného signálu sa modulátor správa ako **DP filter** a z pohľadu kvantizačného šumu ako **HP filter**!

Blokový diagram kompletného A/D prevodníka na báze sigma-delta modulátora prvého rádu je znázornený na nasledujúcom obrázku



príčom priebehy signálov na vstupe modulátora (spojitý sínusový signál) a jeho výstupe (binárny signál) pripomínajú formu šírko-modulovaného signálu.

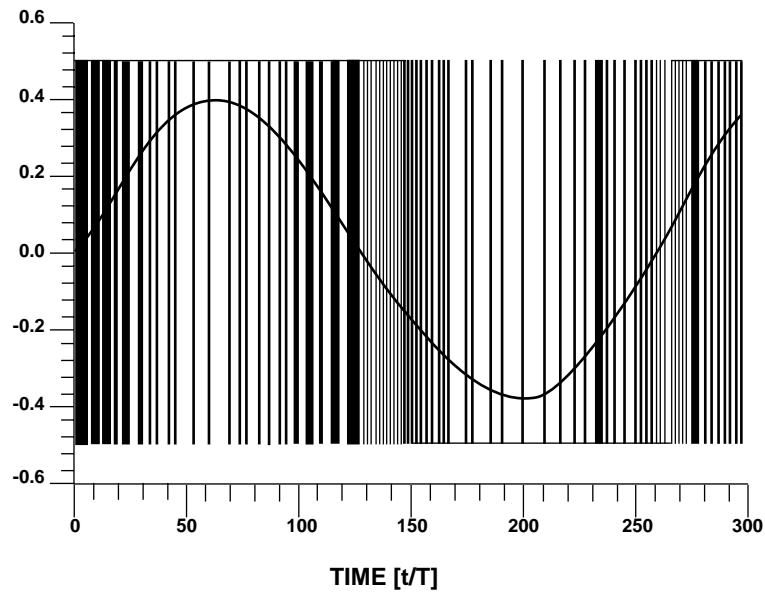
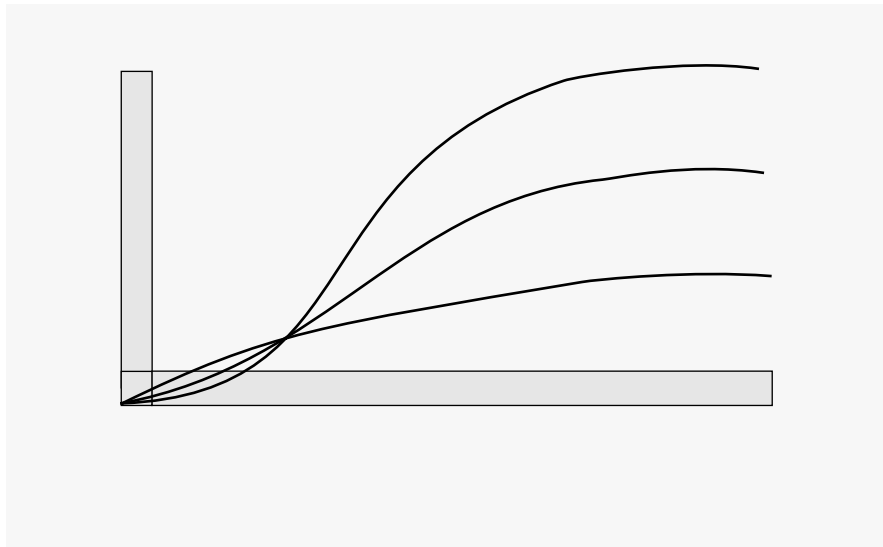
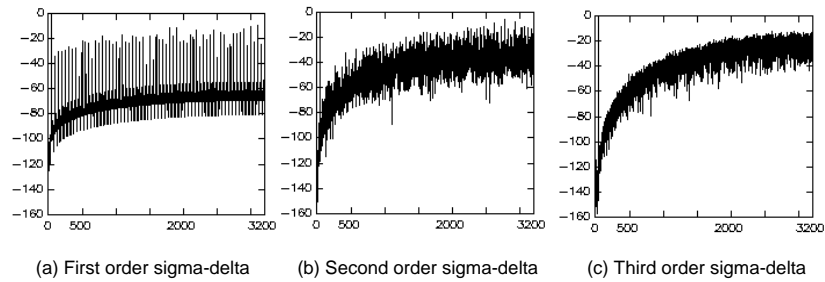


Figure 6-5 Input and Output of a First-Order Sigma-Delta Modulator

V praxi sa využívajú sigma-modulátory vyššieho rádu, ktoré ďalej znižujú úroveň kvantizačného šumu v pásme $\langle -f_B, f_B \rangle$ a presúvajú ho (noise shaping) do oblasti vyšších frekvencií. Rozdiely medzi modulátormi 1-3 rádu sú znázornené na nasledujúcich obrázkoch,



pričom jasne vidno zvyšujúci sa pomer signál/šum pre modulátory vyššieho rádu.



NOTE: Frequency band of interest (in-band): 0 - 5 kHz
Rest of frequency band will be removed by digital decimation filters

1.7 DIGITÁLNA DECIMAČNÁ FILTRÁCIA

Základné úlohy digitálneho decimačného filtra sú:

- 1) Odstránenie kvantizačného šumu z oblasti mimo základného pásma $\langle -f_B, f_B \rangle$.
- 2) Decimácia (zmenšenie vzorkovacej frekvencie) signálu až na požadovanú frekvenciu vzorkovania f_s .

Hlavným problémom pri digitálnej implementácii decimačného filtra je vysoká vstupná frekvencia vzorkovania F_s , ktorá výrazne obmedzuje zložitosť technologicky možnej implementácie.

Najjednoduchšou formou formou decimačného filtra je **hrebeňový** filter (comb filter), ktorý nevyžaduje násobičku. Tento filter má prenosovú funkciu

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (8)$$

pričom pre $N = 4$ dostaneme diferenčnú rovnicu

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) \quad (9)$$

ktorá popisuje spriemerňovanie signálu s pravouhlým oknom. Použitím vzťahov pre geometrický rad dostaneme

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad (10)$$

čo môžeme v prípade vzťahu (9) zapísať v tvare¹⁵

$$y(n) = x(n) - x(n-4) + y(n-1) \quad (11)$$

Pretože za hrebeňovým filtrom nasleduje decimácia faktorom $N:1$, je možné s využitím vzťahu

$$Y(z) = \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right) (1-z^{-N}) x(z) \quad (12)$$

realizovať operáciu diferencie realizovať na nižšej frekvencii vzorkovania, čo je naznačené na nasledujúcom obrázku

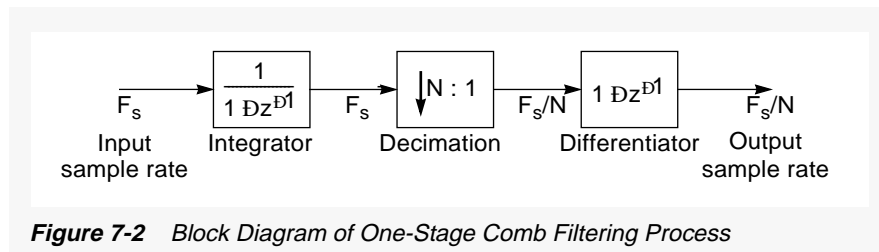


Figure 7-2 Block Diagram of One-Stage Comb Filtering Process

Štruktúra zapojenia ako aj výsledné charakteristiky kaskádneho zapojenia 4 integrátorov a 4 obvodov, ktoré realizujú výpočet diferencie

¹⁵ Tento vzťah dokazuje, že systém s konečnou impulzovou odpoveďou je možné realizovať aj pomocou systému rekurzívneho. Pojem rekurzívny teda nie je ekvivalentný pojmu s nekonečnou impulzovou odpoveďou.

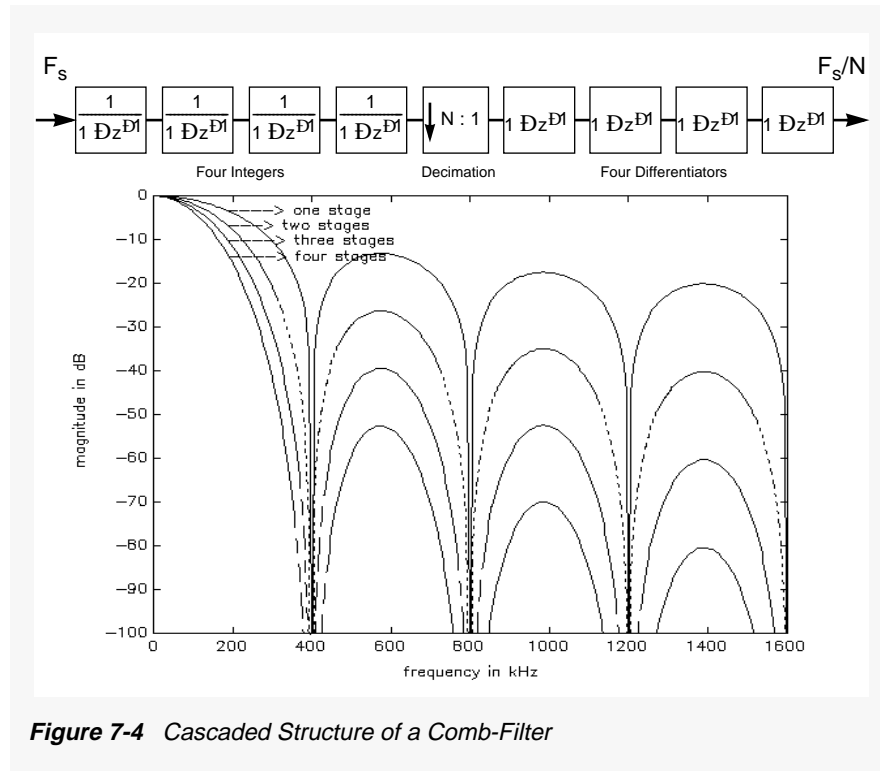
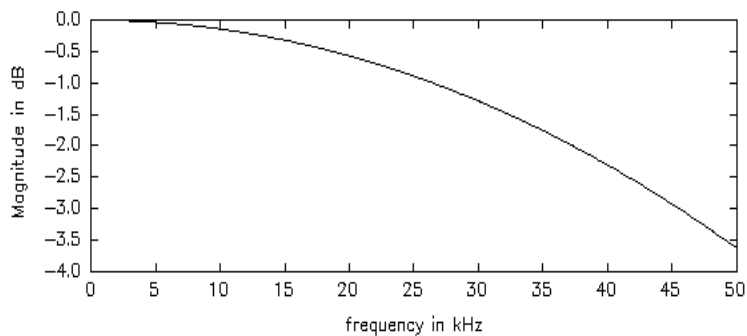


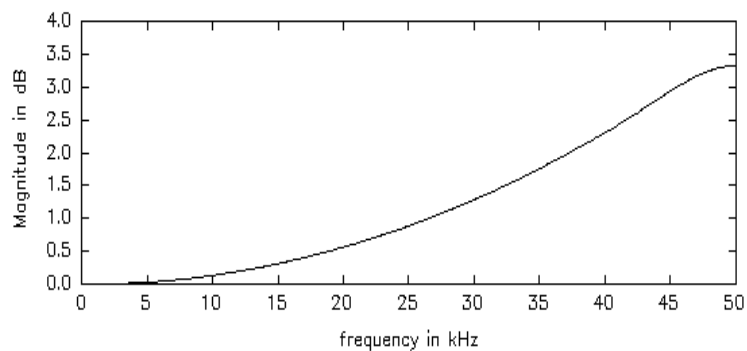
Figure 7-4 Cascaded Structure of a Comb-Filter

dokumentuje, že spektrum v oblasti násobkov 400 KHz má „nulové body“. Hrebeňový filter tak potlačuje vplyv týchto frekvencií na oblasť $\langle -f_B, f_B \rangle$ do ktorej sa tieto frekvencie po decimácii preložia.

Nevýhodou hrebeňového filtra je neideálna frekvenčná charakteristika v oblasti $\langle -f_B, f_B \rangle$, ktorá sa typicky kompenzuje decimáčnym FIR filtraom.



(a) Comb-Filter Magnitude Response in Baseband

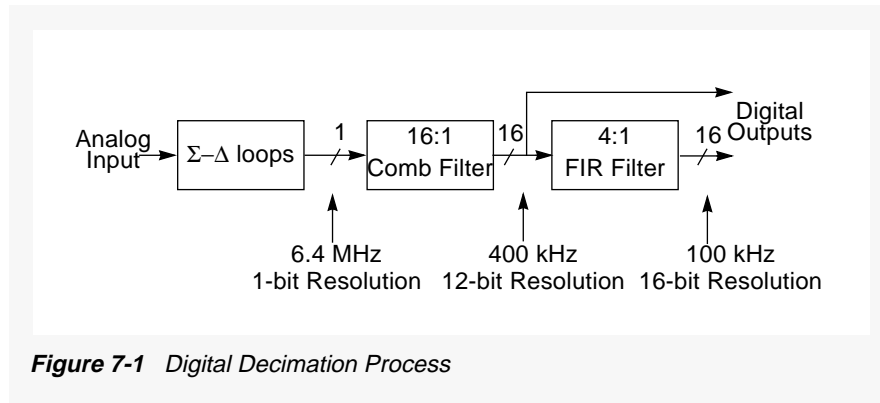


(b) Compensation FIR Filter Magnitude Response

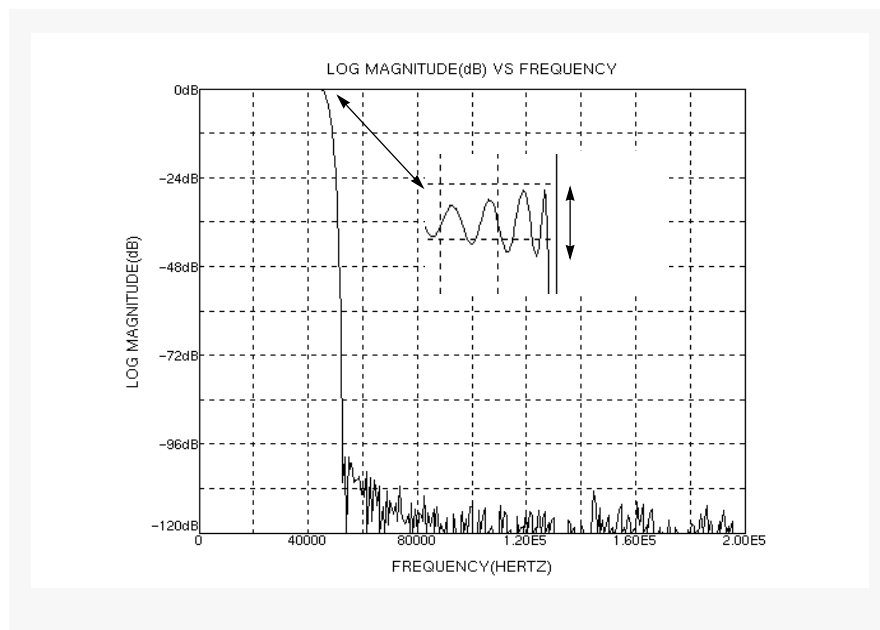
Figure 7-6 Magnitude Response

Blokový diagram, z ktorého je vidno zapojenie kompenzačného decimačného filtra je vidno na nasledujúcom obrázku¹⁶.

¹⁶ Konkrétne číselné hodnoty platia pre prevodník Motorola ADC16S



Celková frekvenčná charakteristika celej štruktúry (kaskádne zapojenie hrebeňového filtra a kompenzačného FIR filtra) jasne dokazuje prakticky ideálne charakteristiky, ktoré je možné v prevodníkoch na báze sigma-delta modulácie dosiahnuť.



LITERATÚRA

- [1] Park, S. :Principles of Sigma-Delta Modulation for Analog-to-Digital Converters. Application Note, Motorola, Inc., APR 8/Rev.1.