



Elektroakustika

L02: Elektro-mechanicko-akustické analógie

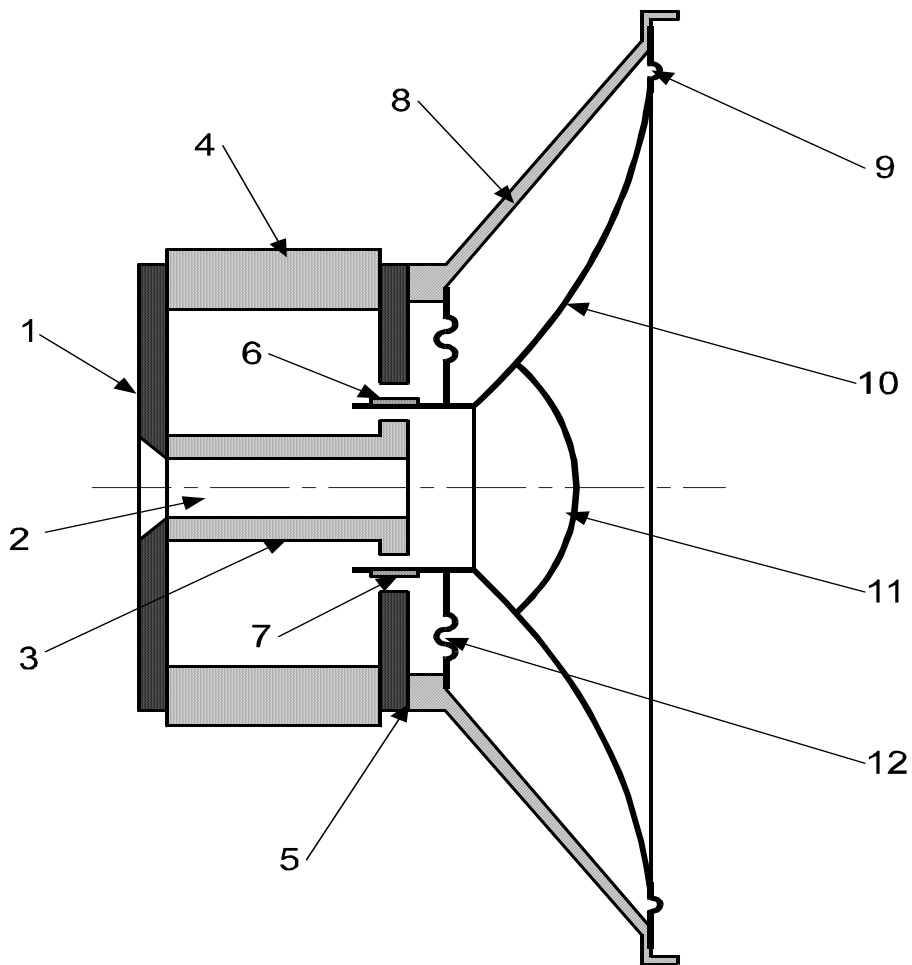
doc. Ing. Jozef Juhár, PhD.

<http://voice.kemt.fei.tuke.sk>

OBSAH

- Elektro-mechanicko-akustické analógie
- Mechanické sústavy posuvné so sústredenými parametrami
- Akustické sústavy so sústredenými parametrami
- Mechanicko-akustický menič

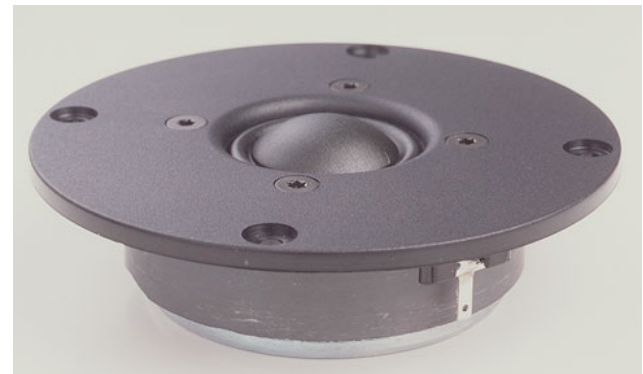
Elektrodynamický reproduktor



- 1 - predná platňa
- 2 - otvor
- 3 - pólové nástavce
- 4 - magnet
- 5 - zadná platňa
- 6 - cievka
- 7 - vzduchová medzera
- 8 - kôš
- 9 - surround
- 10 - membrána
- 11 - prachový kryt
- 12 - strediaci membrána

Podsystemy elektrodynamického reproduktora

- elektrodynamický elektromechanický menič:
 - magnetický obvod (permanentný magnet, pólové nastavce, predná a zadná platňa)
 - cievka;
- akustický vysielateľ - membrána v tvare:
 - zrezaného kužeľa
 - guľového vrchlíka
- zavesenie membrány a cievky:
 - strediaca membrána - pavúka (spider)
 - poddajné zavesenie na okrajoch (surround)



Typické parametre nízkotónového reproduktora (woofer)

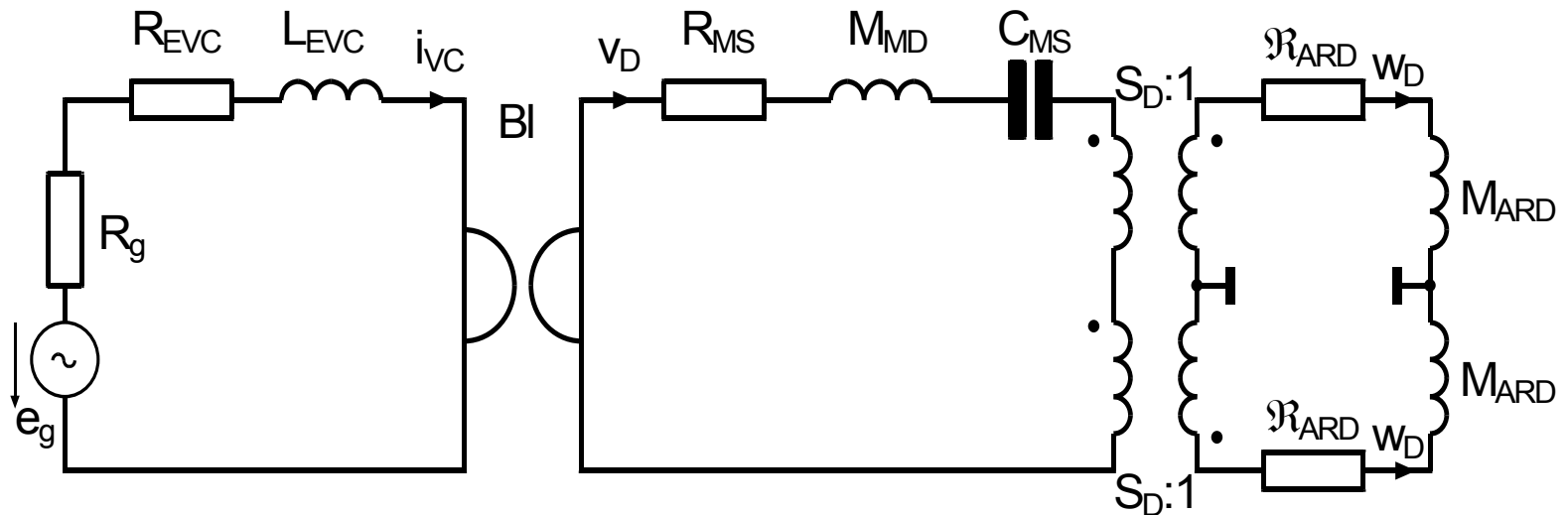
Specifications

Nominal power	100 W	
Maximum power	150 W	
Sensitivity	92.68 dB	
Cone	Polyglass®	
Surround	rubber	
Nom. impedance	5 ohms	
DC resistance	5.2 ohms	
VC diameter	40 mm	1.57 in
VC height	22.5 mm	0.89 in
Former	Kapton®	
Layers	2	
Wire	copper	
Inductance	1.19 mH	
Xmax	8.3 mm	0.33 in
Magnet d x h	134 x 20 mm	5.27 x 0.78 in
Magnet weight	1160 g	2.56 lb
Flux density	1.25 T	
Gap height	6 mm	0.24 in
Net weight	3.7 kg	8.15 lb

Parameters

Fs	50 Hz	
Vas	32.8 l	2001.6 in ³
Qts	0.42	
Qes	0.45	
Qms	7.16	
Re	5.2 ohms	
Sd	346.4 Cm ²	53.7 in ²
Cas	234E-09 m ⁵ /N	
Mas	43.4 kg/m ⁴	
Ras	1904.4 ohms.ac	
Cms	0195E-6 m/N	
Mms	52.09 g	0.115 lb
Rms	2.28 g/s	
Ces	275.6 mF	
Les	36.8 mH	
Res	82.7 ohms	
Bl	13.75 N/A	
SPL	91.4 dB/W/m	

Náhradná schéma elektrodynamického, priamovysielaajúceho reproduktora



elektrická časť

elektromechanický
menič

mechanická časť

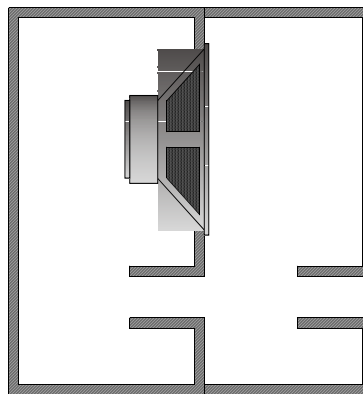
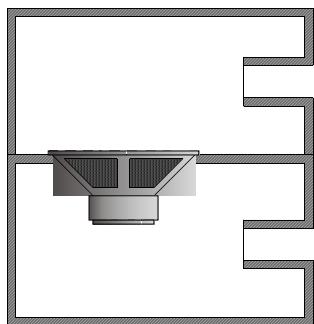
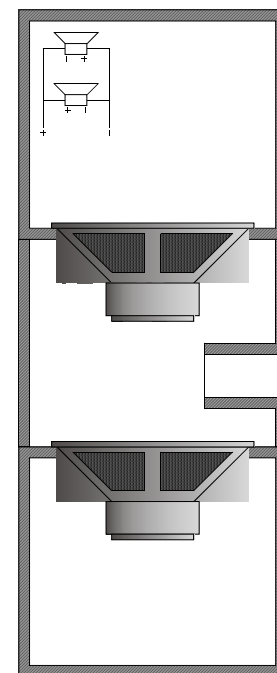
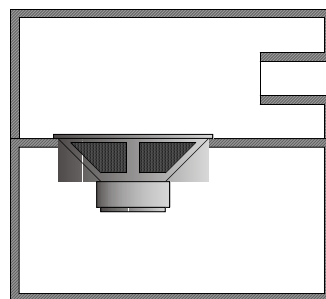
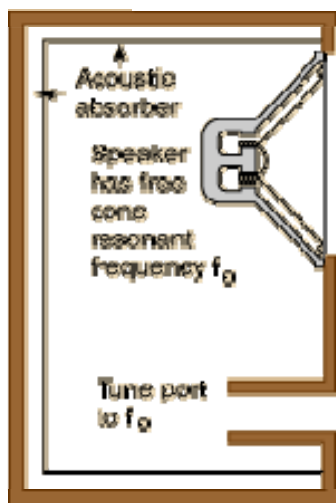
mechanicko-akustický
menič

akustická časť

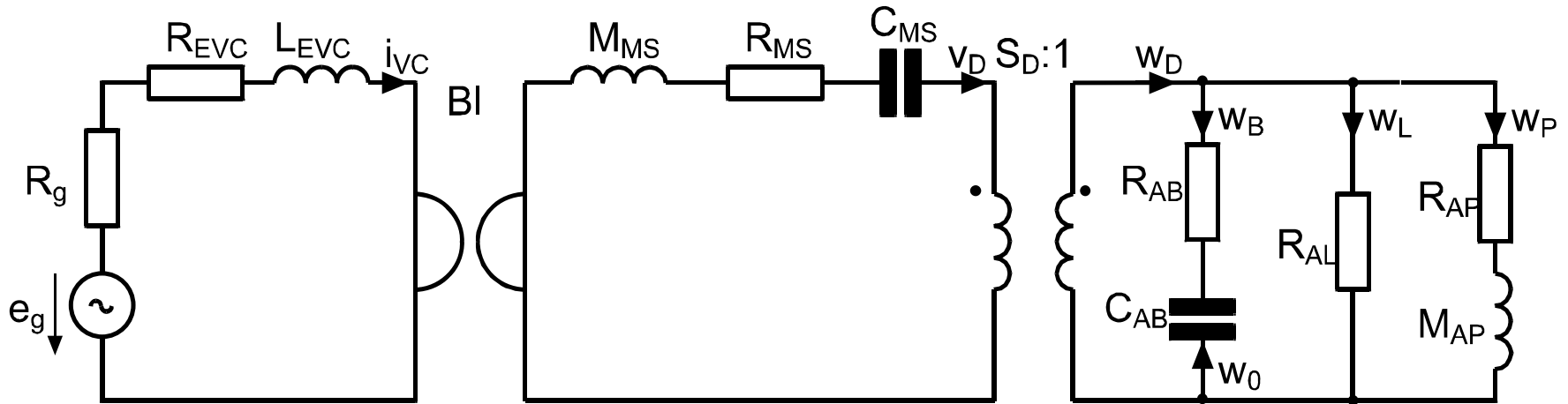
Príklady reproduktorových sústav



Ozvučnica ako akustický obvod



Náhradná schéma reproduktora v basreflexovej ozvučnici



elektrická časť

elektromechanický
menič

mechanická časť

mechanicko-akustický
menič

Predmet elektro-mechanicko-akustických analógií

- Predmetom elektro-mechanicko-akustických analógií je aplikovanie teórie elektrických obvodov na riešenie mechanických a akustických problémov.
 - Poznámka: Klasickým spôsobom riešenia vibračných javov v mechanike a akustike je riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré charakterizujú príslušný vibračný jav. Podobná situácia existovala v počiatkoch rozvoja telefónu a rozhlasu (elektrotechniky a elektroniky), avšak s rastom ich zložitosti sa dospelo ku schématickej reprezentácii obvodových zapojení.

Výhody schématickej reprezentácie obvodových zapojení

- Vizualizácia problému, t.j. vlastnosti sústavy sa dajú odhadnúť na "prvý pohľad" priamo zo schémy.
- Diferenciálne rovnice, ktoré sú často nutné pre hlbšiu analýzu sústavy, možno napísať priamo zo schémy sústavy.
- Napr. sústava rovníc ktorú dostaneme aplikovaním I. alebo II. Kirchhoffovho zákona na elektrický obvod nie je ničím iným, než sústavou lineárnych diferenciálnych rovníc pre daný obvod.

Prečo schématické znázornenie mechanických a akustických sústav?

- Koexistencia elektrických, mechanických a akustických častí v mikrofónoch a reproduktoroch;
- Zvyšujúce sa nároky na ich kvalitu, z čoho vyplynuli požiadavky na exaktné metódy ich analýzy a syntézy.

Fyzikálny a matematický význam obvodových prvkov a veličín

- Obvodové prvky:
 - prvok kladúci odpor
 - prvok akumulujúci energiu
 - zotrvačný prvok
 - transformačný člen
 - menič energie
- Obvodové veličiny:
 - príčina
 - následok
 - veľkosť obvodového prvku
- Generátory (zdroje) energie:
 - generátor potenciálovej energie
 - generátor kinetickej energie

Požiadavky na metódy, vedúce k schématickému znázorneniu akustických a mechanických sústav

- Metóda musí umožňovať nakreslenie schémy z vizuálnej obhliadky zariadenia.
- Metóda musí umožňovať zmiešanie elektrických, mechanických a akustických prvkov do jednej schémy.
- V zmiešanom (kombinovanom) obvode musí byť zachovaná identita každého prvku.
- Musí používať symboly a pravidlá známe z elektrických obvodov.
- Postup riešenia:
 - vizuálna obhliadka sústavy
 - symbolická schéma sústavy a jej popis
 - analogická schéma sústavy a jej popis
 - sústava rovníc obvodu a ich riešenie

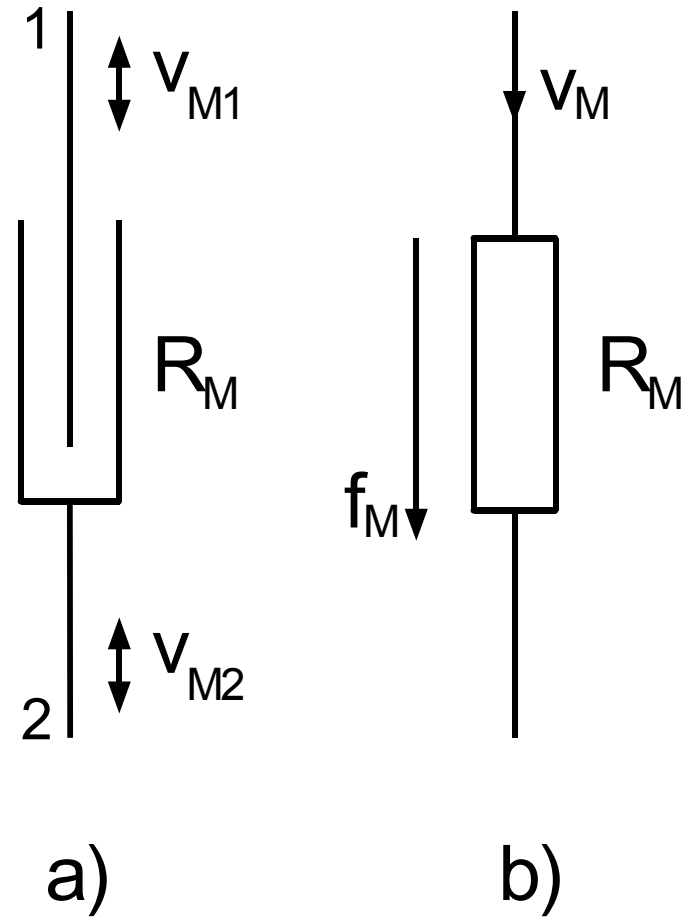
Mechanické sústavy posuvné so sústredenými parametrami

- kmitajúce **mechanické** časti elektro-mechanicko-akustických sústav
- vykonávajú iba posuvný pohyb, nevykonávajú rotačný pohyb
- základné prvky mechanických sústav
 - mechanický odpor (R_M)
 - mechanická hmotnosť (M_M)
 - mechanická poddajnosť (C_M)
- veličiny mechanických sústav
 - mechanická sila (F_M, f_M)
 - mechanická rýchlosť (v_M)
- zdroje mechanickej energie
 - zdroj konštantnej mechanickej sily
 - zdroj konštantnej mechanickej rýchlosti

Mechanický odpor

- značka tzv. symbolickej schémy (a)
- značka tzv. impedančnej analogickej schémy (b)
- Hookov vs. Ohmov zákon

$$v_M = \frac{f_M}{R_M} \left[\text{N}, \Omega_M; \text{ms}^{-1} \right]$$



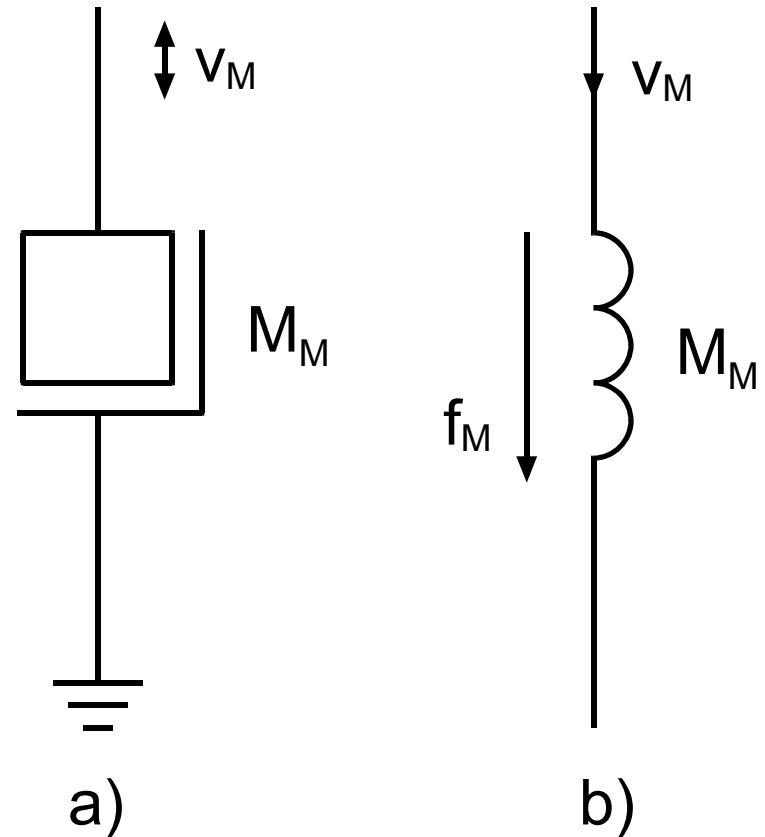
Mechanická hmotnosť

- II. Newtonov pohybový zákon vs. Ohmov zákon

$$f_M = M_M \frac{dv_M}{dt}$$

$$v = v_{\max} e^{j\omega t}$$

$$f_M = j\omega M_M \cdot v_M \left[\text{s}^{-1}, \text{kg}, \text{ms}^{-1}; \text{N} \right]$$



Mechanická poddajnosť

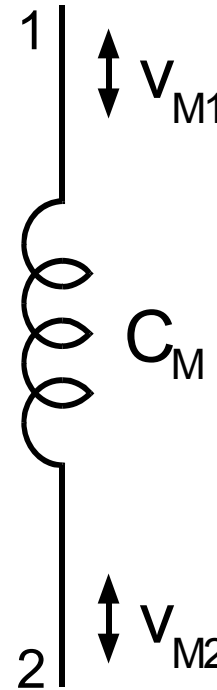
- Hookov zákon vs. Ohmov zákon

$$y = f_M \cdot C_M$$

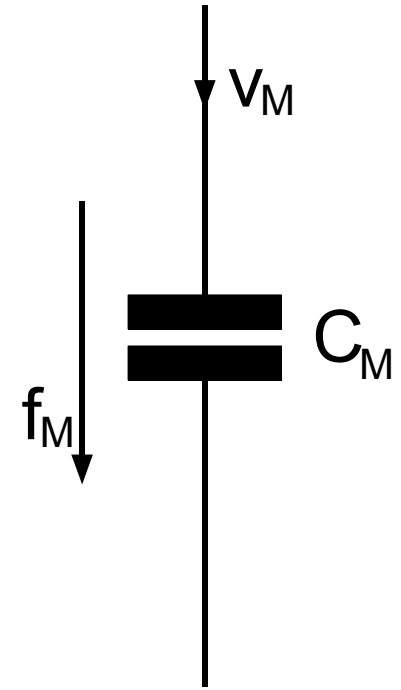
$$y = y_{\max} e^{j\omega t}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = j\omega y$$

$$v_M = f_M \cdot j\omega C_M \left[\text{N}, \text{s}^{-1}, \dots; \text{ms}^{-1} \right]$$

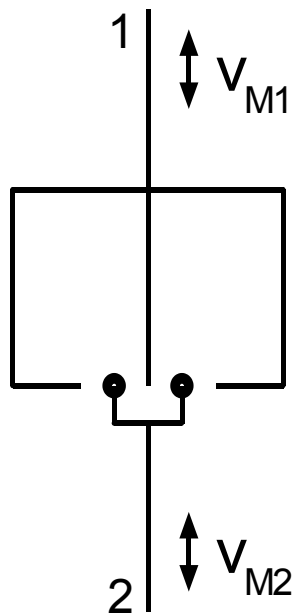


a)

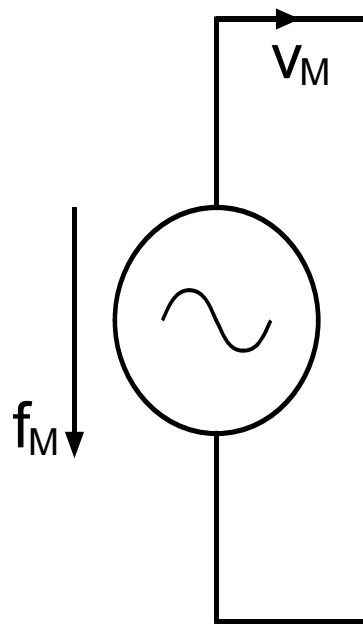


b)

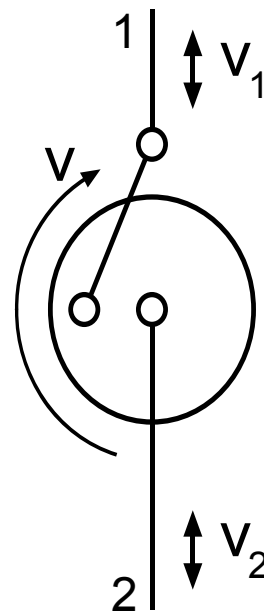
Zdroj sily resp. rýchlosti



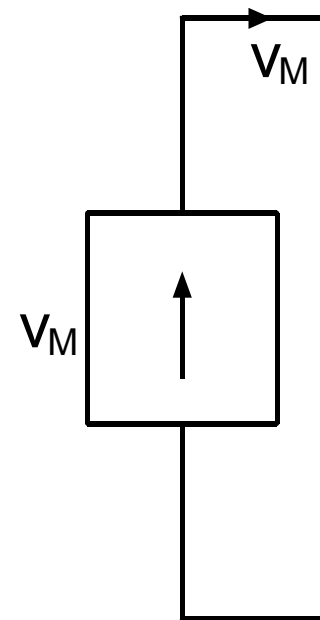
a)



b)

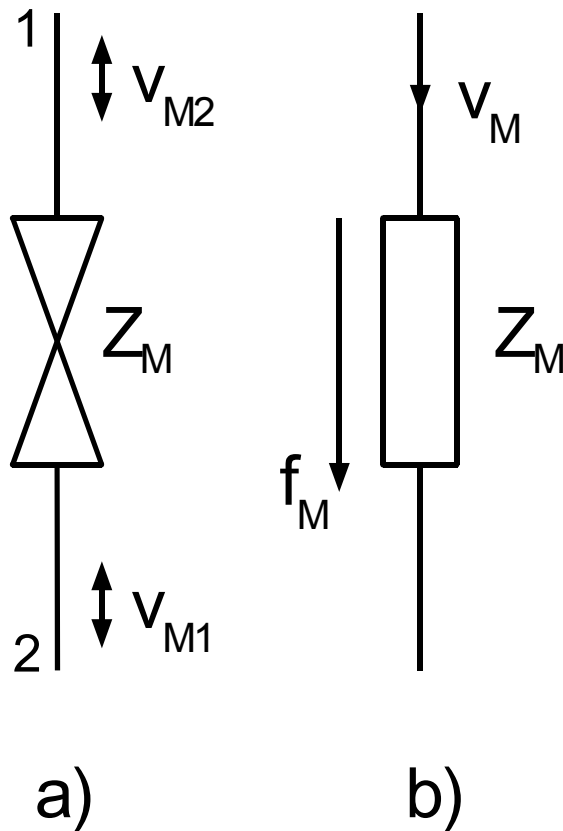


a)



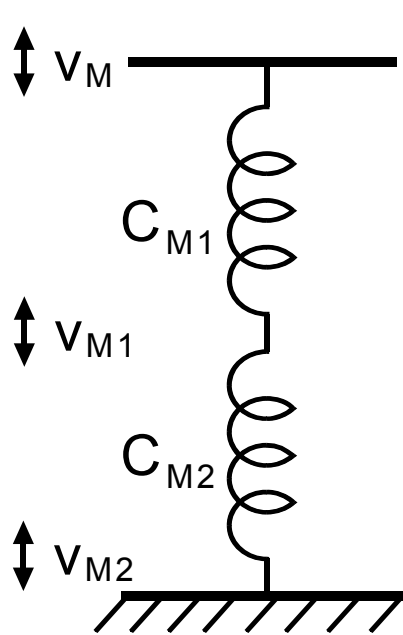
b)

Analógia Ohmovho zákona v mechanických sústavách – mechanická impedancia

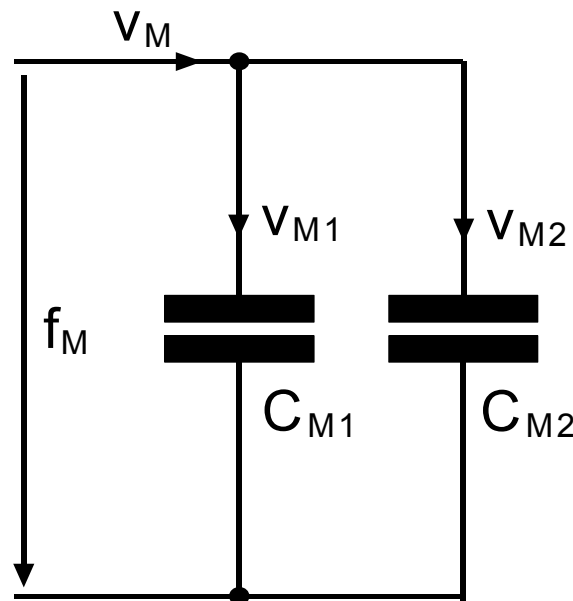


$$Z_M = \frac{f_M}{v_M} = \begin{cases} R_M \\ j\omega M_M = sM_M \\ \frac{1}{j\omega C_M} = \frac{1}{sC_M} \end{cases}$$

Analógia I. Kirchhoffovho zákona



a)



b)

$$f_M = f_{M1} = f_{M2}$$

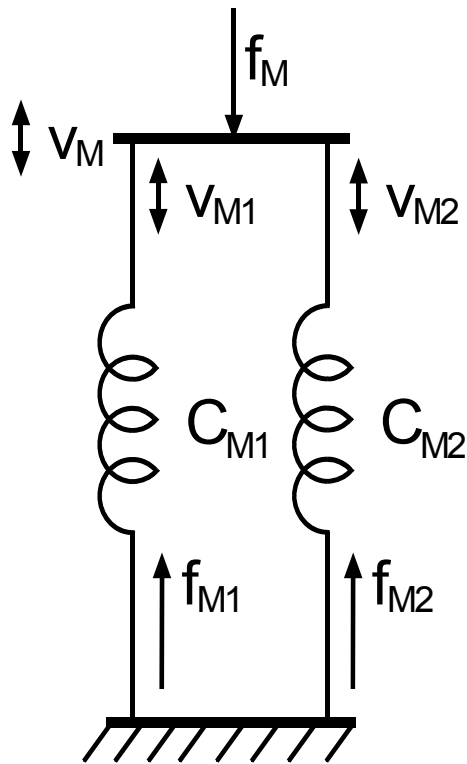
$$y_M = y_{M1} + y_{M2}$$

$$v_M = v_{M1} + v_{M2}$$

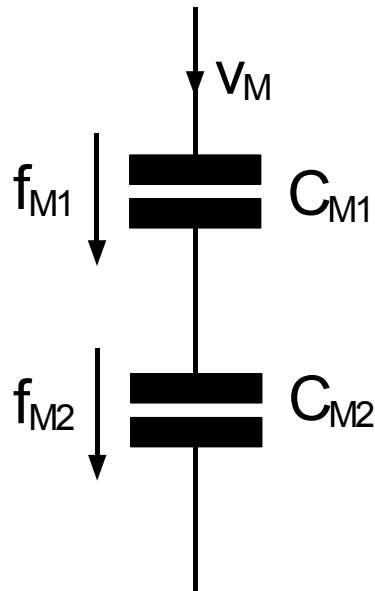
$$\sum_i v_{Mi} = 0$$

zapojenie mechanických prvkov "na spoločnú silu"

Analógia II. Kirchhoffovho zákona



a)



b)

$$y_M = y_{M1} = y_{M2}$$

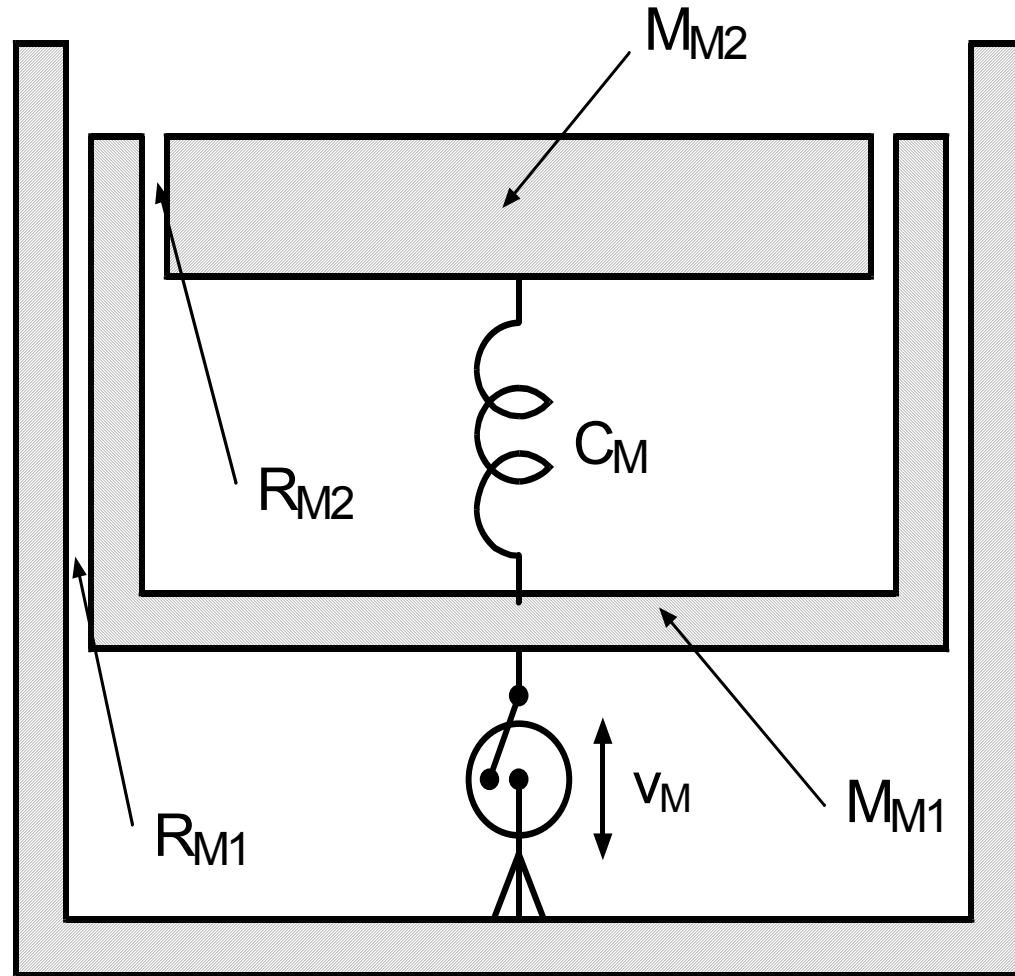
$$v_M = v_{M1} = v_{M2}$$

$$F_M = F_{M1} + F_{M2}$$

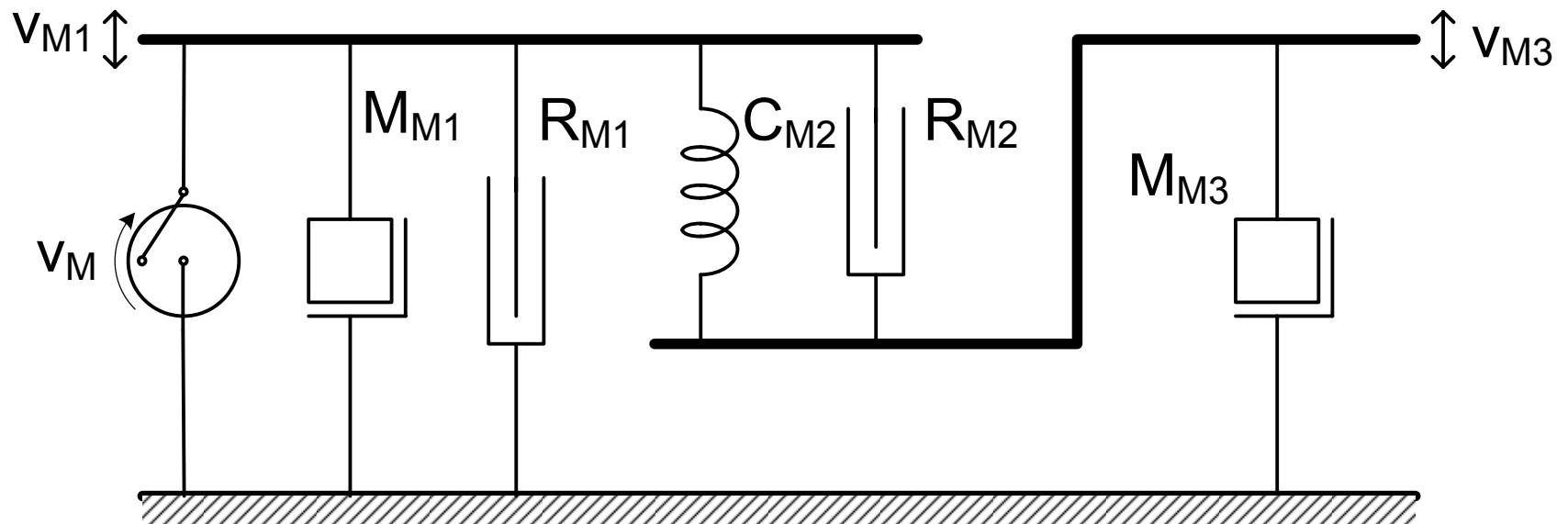
$$\sum_i F_{Mi} = 0$$

zapojenie mechanických prvkov "na spoločnú rýchlosť"

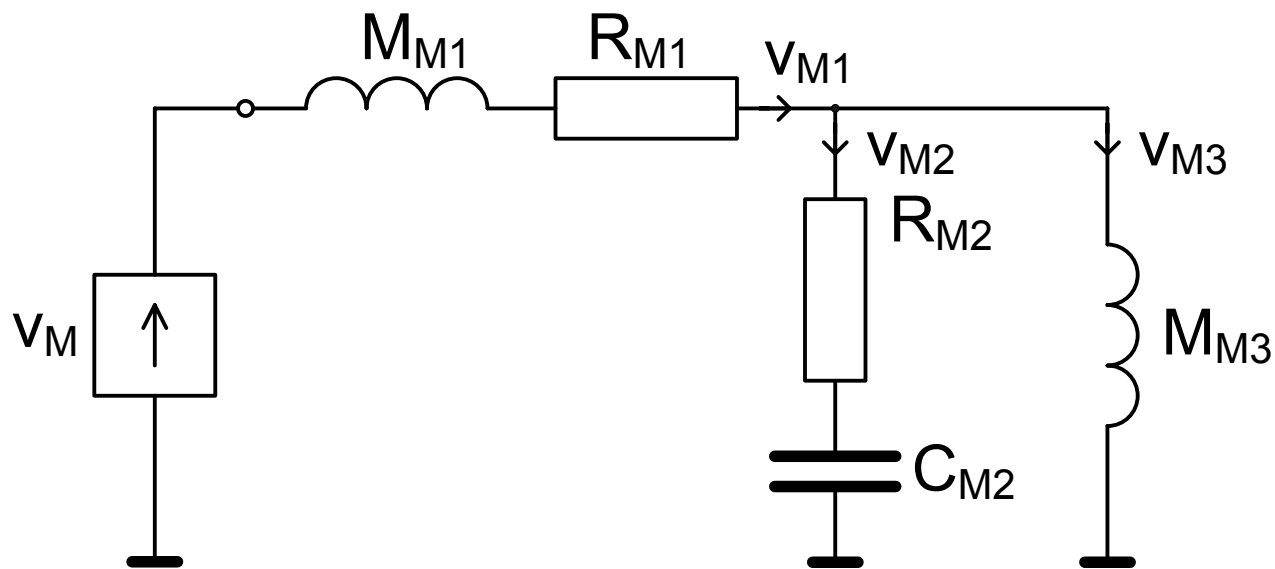
Príklad – mechanická sústava



Príklad – symbolická schéma mechanickej sústavy



Príklad – analogická schéma mechanickej sústavy



Príklad – výpočet „obvodových“ veličín sústavy – mechanické rýchlosti

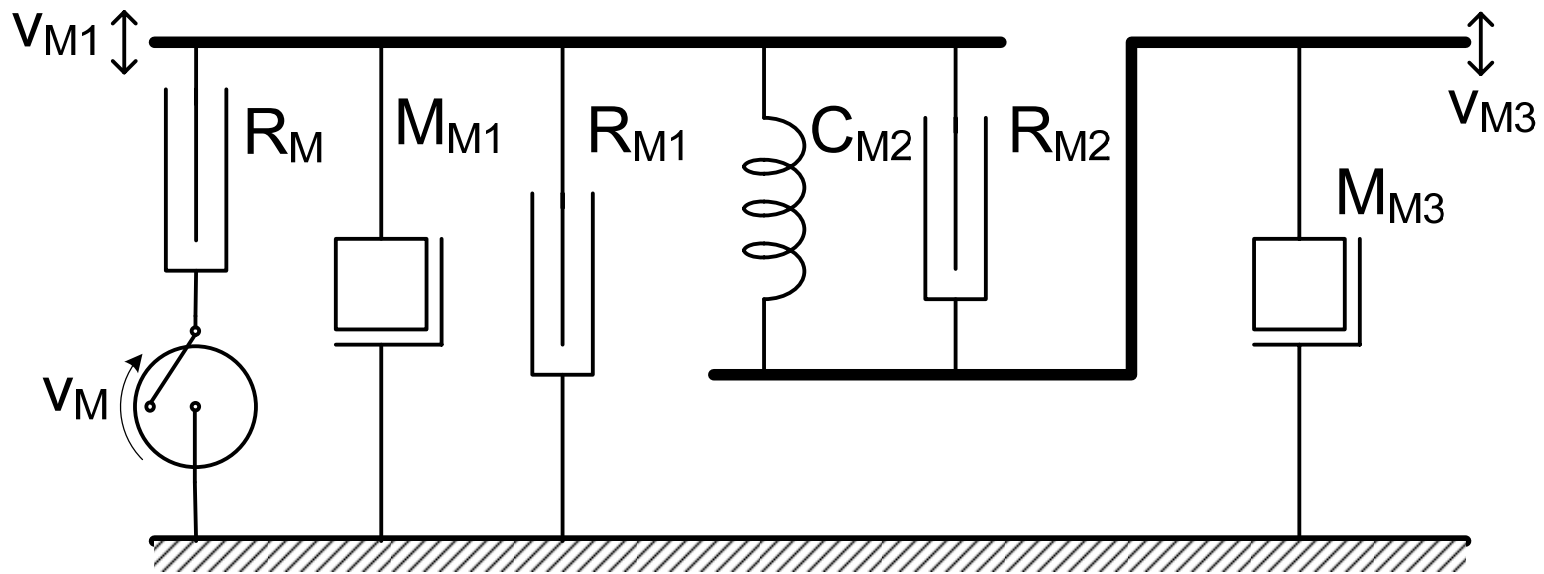
$$v_{M2} = v_M \frac{Z_{M3}}{Z_{M2} + Z_{M3}} = v_M \frac{sM_{M3}}{R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} + sM_{M3}} = v_M \frac{s^2 M_{M3} C_{M2}}{1 + sC_{M2} R_{M2} + s^2 M_{M3} C_{M2}}$$

$$\frac{v_{M2}}{v_M} = \frac{s^2 M_{M3} C_{M2}}{1 + sC_{M2} R_{M2} + s^2 M_{M3} C_{M2}}$$

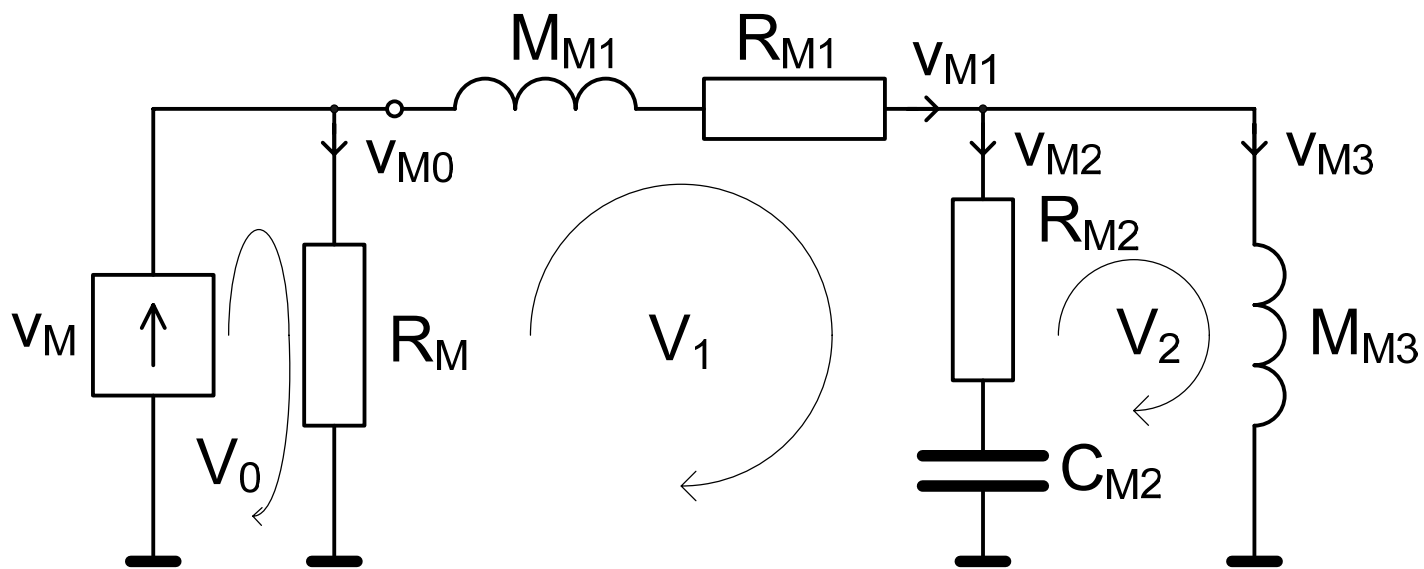
$$v_{M3} = v_M \frac{Z_{M2}}{Z_{M2} + Z_{M3}} = v_M \frac{R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}}}{R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} + sM_{M3}} = v_M \frac{1 + sC_{M2} R_{M2}}{1 + sC_{M2} R_{M2} + s^2 M_{M3} C_{M2}}$$

$$\frac{v_{M2}}{v_M} = \frac{1 + sC_{M2} R_{M2}}{1 + sC_{M2} R_{M2} + s^2 M_{M3} C_{M2}}$$

Príklad – upravená symbolická schéma mechanickej sústavy



Príklad – upravená analogická schéma mechanickej sústavy



Príklad – riešenie analogickej schémy metódou slučkových prúdov

$$R_M (V_1 - V_0) + (R_{M1} + sM_{M1}) \cdot V_1 + \left(R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} \right) (V_1 - V_2) = 0$$

$$\left(R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} \right) (V_2 - V_1) + sM_{M3} \cdot V_2 = 0$$

$$V_0 = v_M$$

$$\left(R_M + R_{M1} + sM_{M1} + R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} \right) \cdot V_1 - \left(R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} \right) \cdot V_2 = R_M v_M$$

$$- \left(R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} \right) \cdot V_1 + \left(R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} + sM_{M3} \right) \cdot V_2 = 0$$

$$v_{M1} = V_1$$

$$v_{M2} = V_1 - V_2$$

$$v_{M3} = V_2$$

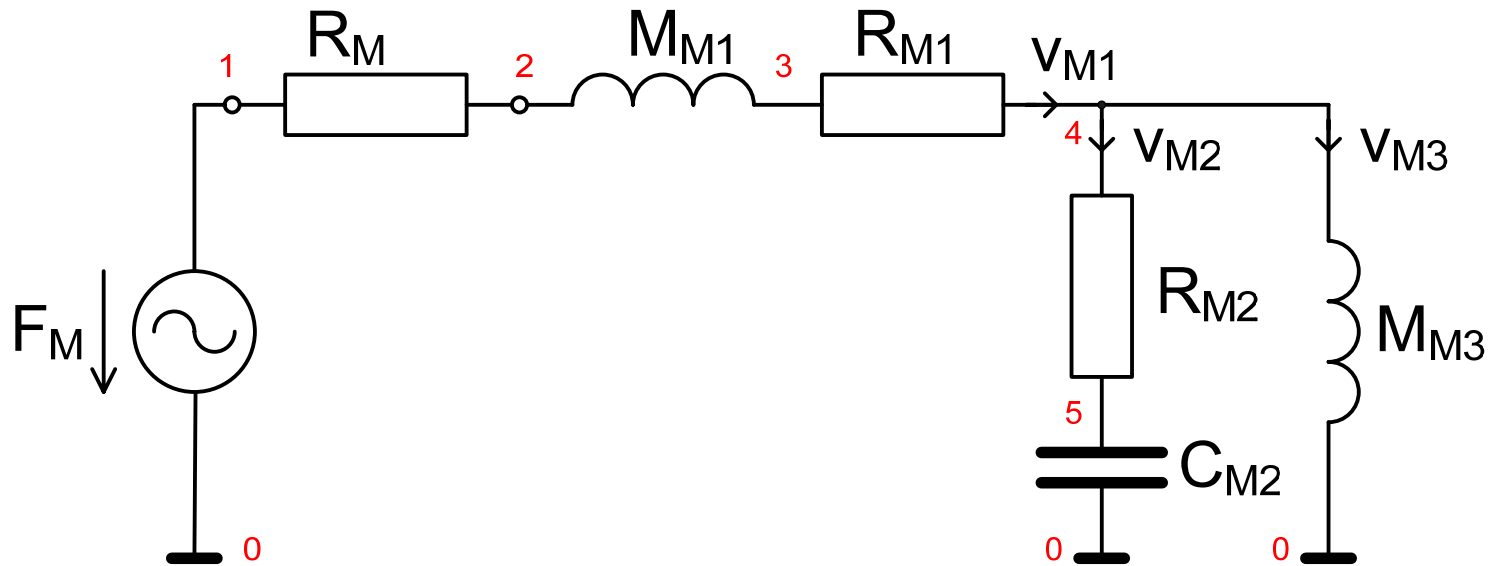
Maticový zápis a náčrt riešenia sústavy lineárnych rovníc:

$$\begin{pmatrix} \left(R_M + R_{M1} + sM_{M1} + R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} \right) & -\left(R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} \right) \\ -\left(R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} \right) & \left(R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} + sM_{M3} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_M v_M \\ 0 \end{pmatrix}$$

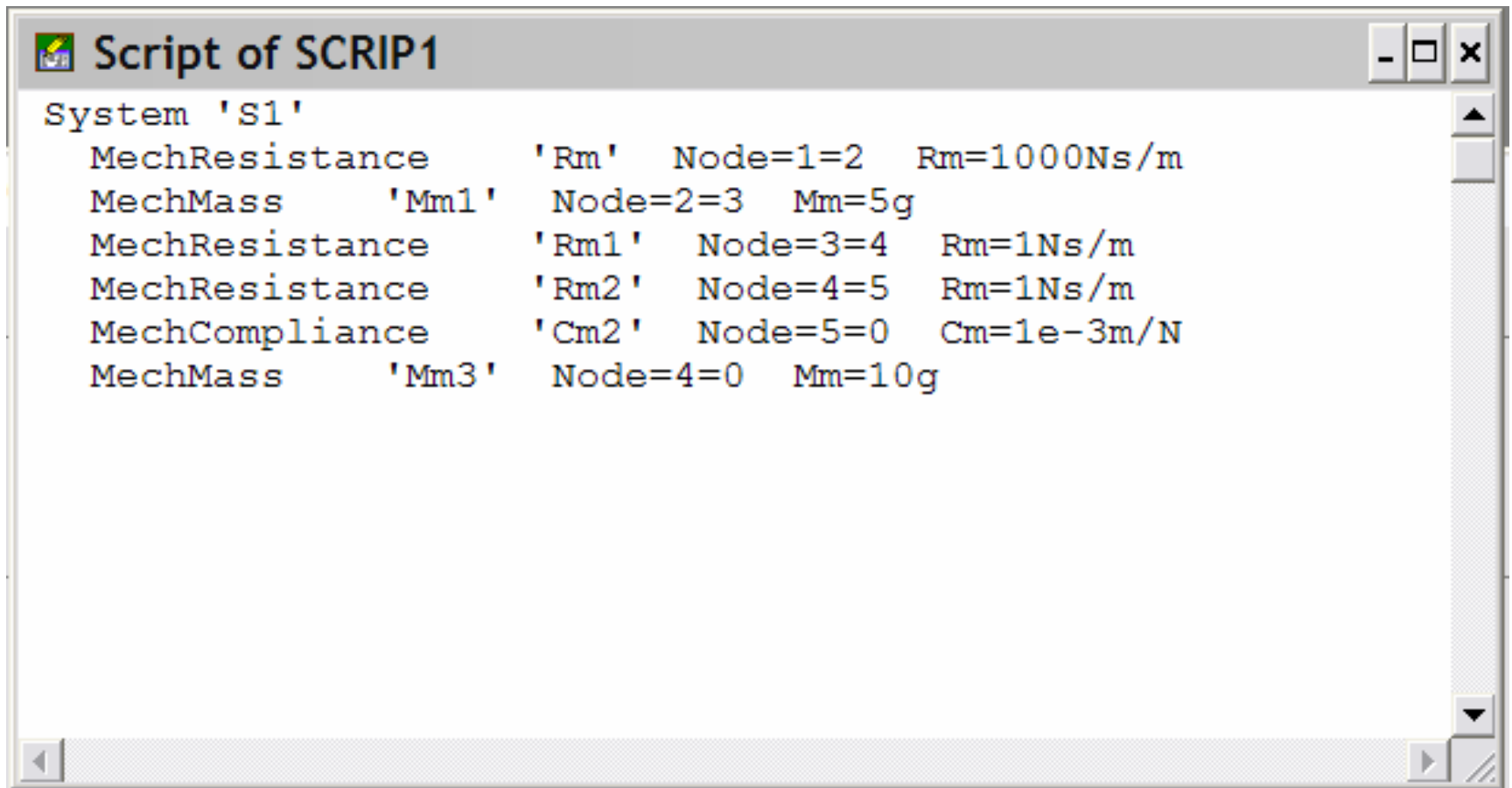
$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(R_M + R_{M1} + sM_{M1} + R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} \right) & -\left(R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} \right) \\ -\left(R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} \right) & \left(R_{M2} + \frac{1}{sC_{M2}} + sM_{M3} \right) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} R_M v_M \\ 0 \end{pmatrix}$$

Príklad – riešenie mechanickej sústavy pomocou programu AkAbak

- úprava analogickej schémy pomocou Théveninovej vety: zmena zdroja konštantnej rýchlosti na zdroj konšt. sily („napät'ový“ charakter)
- očíslovanie uzlov schémy



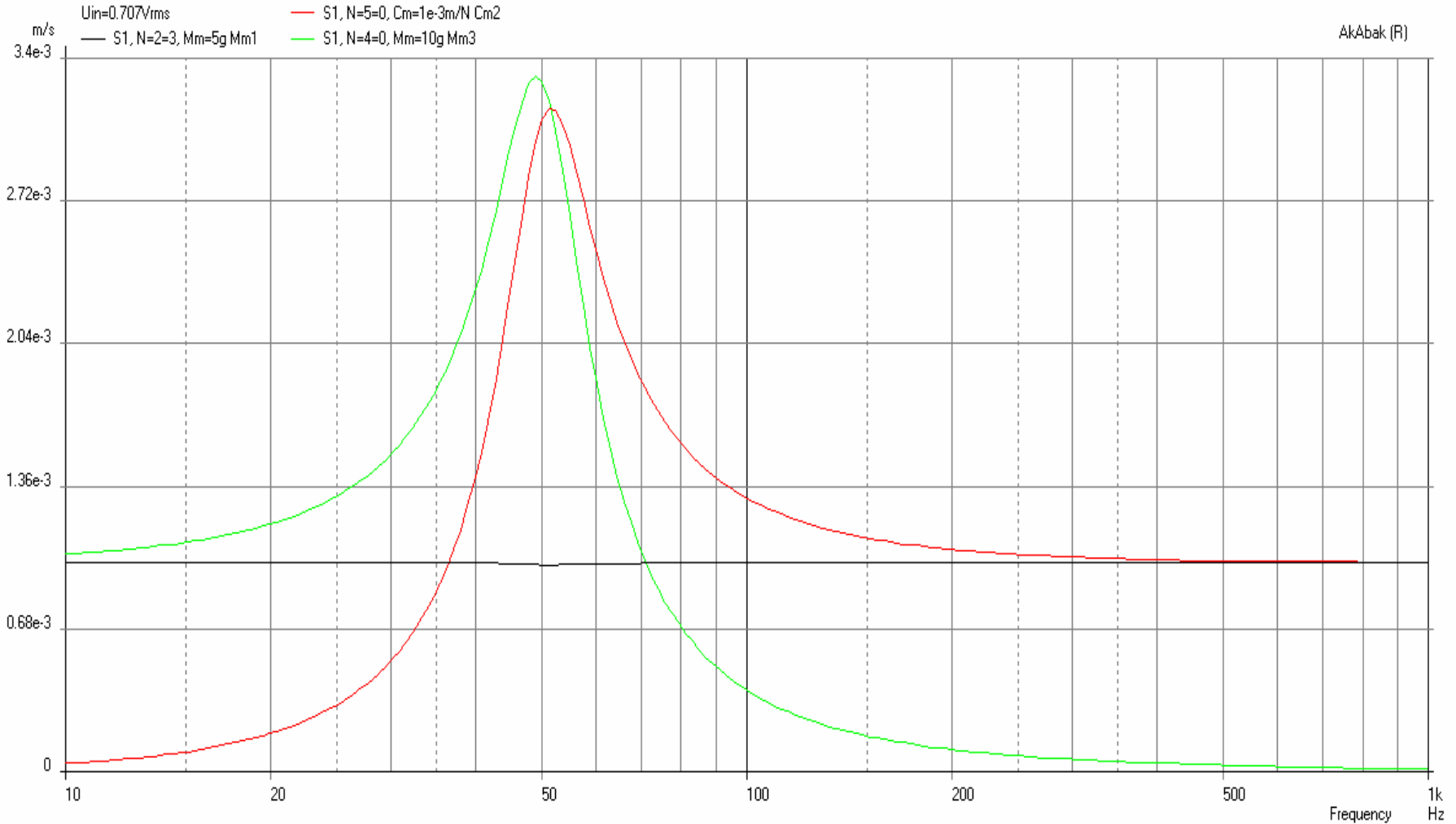
AkAbak: analogická schéma sústavy zapísaná vo forme skriptu



```
System 'S1'  
MechResistance      'Rm'   Node=1=2   Rm=1000Ns/m  
MechMass            'Mm1'  Node=2=3   Mm=5g  
MechResistance      'Rm1'  Node=3=4   Rm=1Ns/m  
MechResistance      'Rm2'  Node=4=5   Rm=1Ns/m  
MechCompliance      'Cm2'  Node=5=0   Cm=1e-3m/N  
MechMass            'Mm3'  Node=4=0   Mm=10g
```

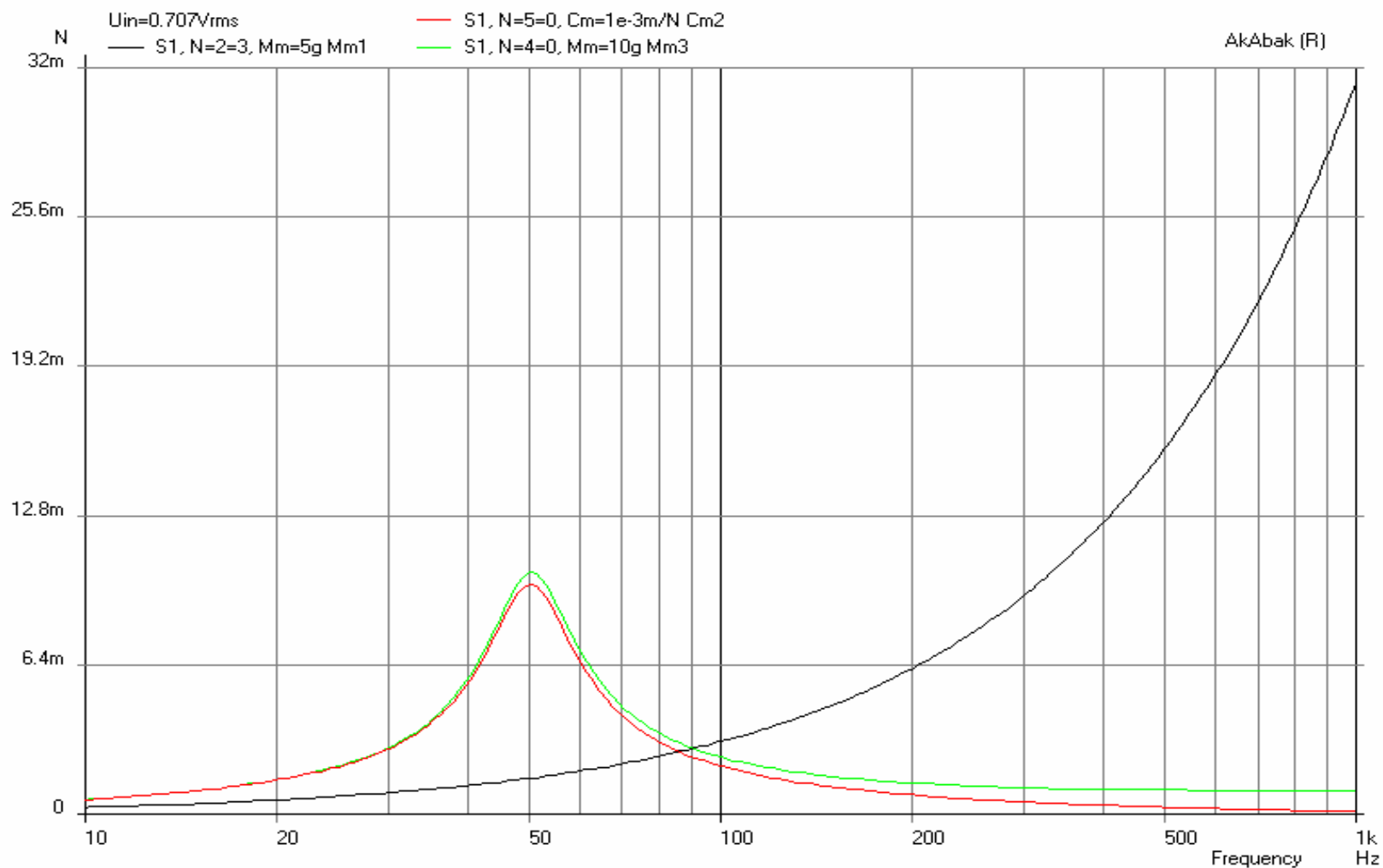

AkAbak: mechanické rýchlosti v sústave

24. Velocity of SCRIP1, Amplitude (Phase)



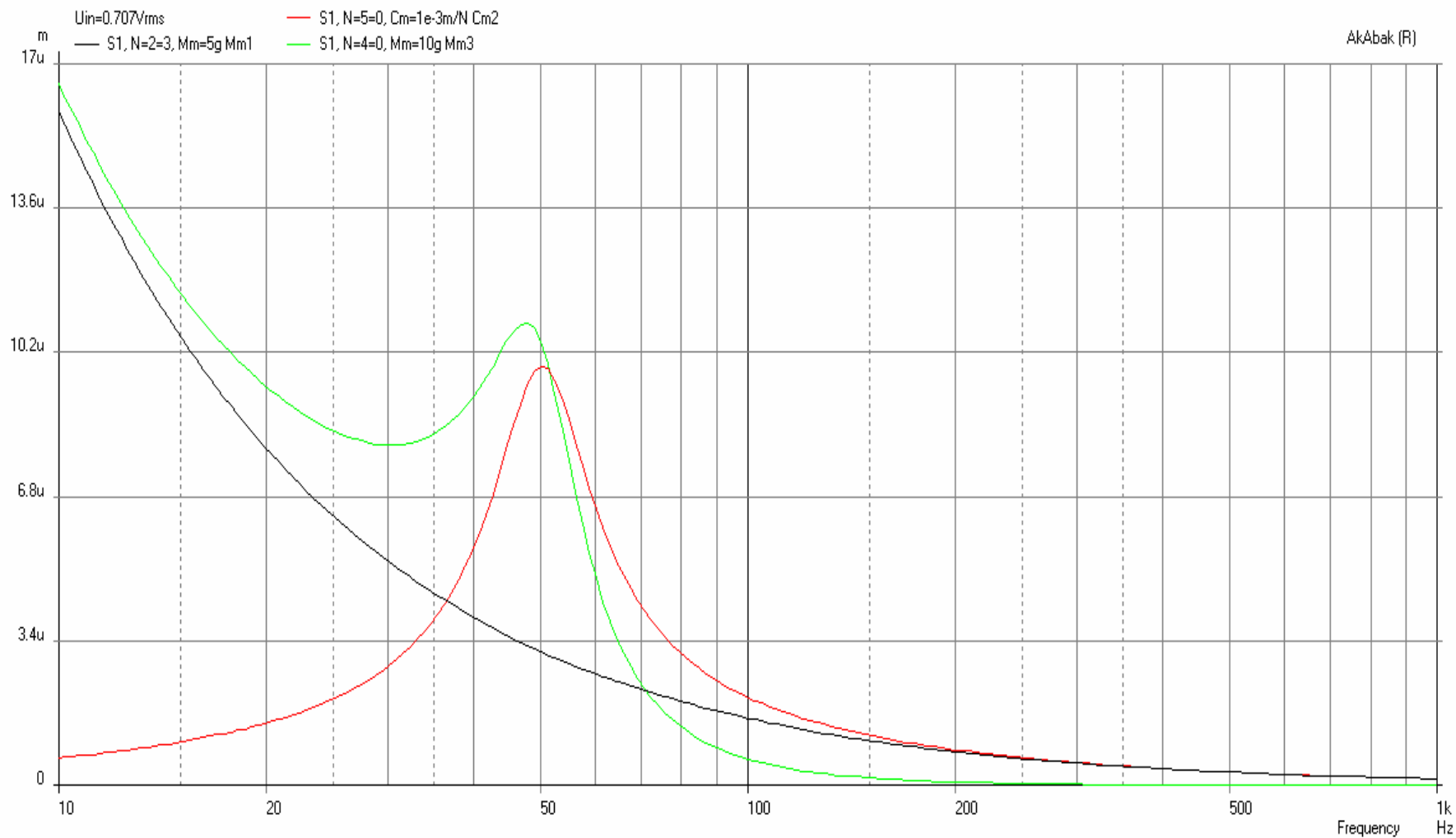
AkAbak: mechanické sily v sústave

25. Force of SCRIP1, Amplitude (Phase)



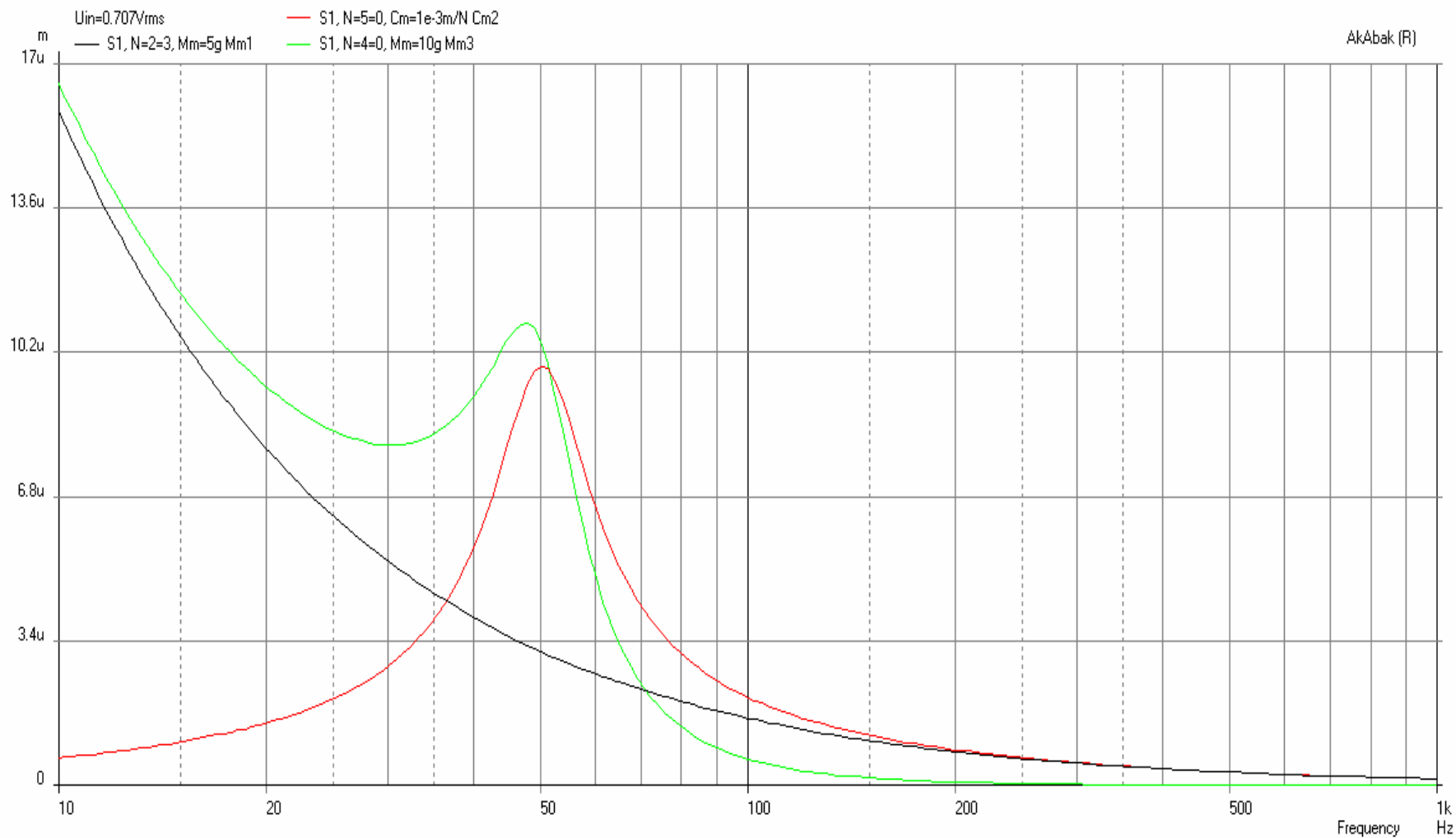
AkAbak: mechanické výchylky v sústave

26. Excursion of SCRIP1, Amplitude (Phase)



AkAbak: mechanické zrýchlenia v sústave

26. Excursion of SCRIP1, Amplitude (Phase)



Test

- Mechanická hmotnosť má v analogickej schéme značku ako:
 - a) elektrický odpor
 - b) elektrická indukčnosť
 - c) elektrická kapacita
- Mechanické prvky kmitajúce rovnakou rýchlosťou sú v analogickej schéme zapojené:
 - a) paralelne
 - b) do série
- Napíšte „mechanickú verziu“ Ohmovho zákona

Akustické sústavy so sústredenými parametrami

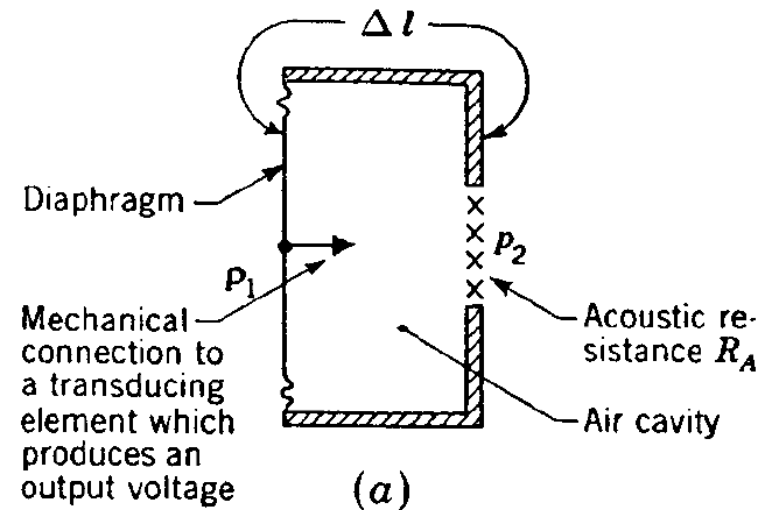
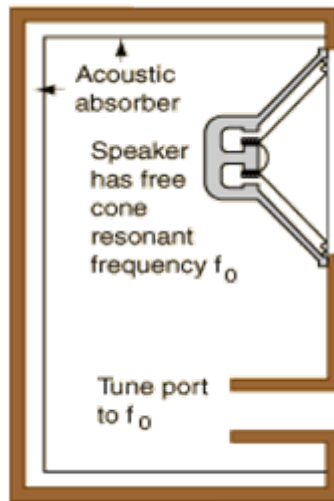
- tzv. malé akustické obvody, ktorých rozmery sú oveľa menšie než vlnová dĺžka zvukového vlnenia
- dutiny, trubice, kapiláry, štrbiny, mriežky,

$$l_{\max} \ll \lambda \text{ [m]} \Rightarrow f \ll \frac{c_0}{l_{\max}} \text{ [Hz]}$$

$$l_{\max} < \frac{\lambda}{4} \text{ [m]} \Rightarrow f < \frac{c_0}{4l_{\max}} \text{ [Hz]}$$

$$1. f_{\max} = 250 \text{ Hz} \Rightarrow l_{\max} < \frac{\lambda}{4} = \frac{c_0}{4 f_{\max}} = \frac{344}{4 \cdot 250} = 0.344 \text{ m}$$

$$2. f_{\max} = 2500 \text{ Hz} \Rightarrow l_{\max} < \frac{\lambda}{4} = \frac{c_0}{4 f_{\max}} = \frac{344}{4 \cdot 2500} = 0.0344 \text{ m}$$



Akustické prvky a veličiny

- Akustické prvky
 - akustický odpor
 - akustická hmotnosť
 - akustická poddajnosť
- Akustické veličiny
 - akustický tlak → zdroj konštantného akustického tlaku
 - akustická objemová rýchlosť → zdroj konštantnej objemovej rýchlosti

Akustická objemová výchylka a objemová rýchlosť

- **akustická objemová rýchlosť** je rýchlosť toku prostredia v ktorom sa šíri zvuková vlna cez jednotku plochy – w_A [m^3s^{-1}]
- **akustická objemová výchylka** je veľkosť objemu prostredia, ktorý je "vytlačенý" zo svojej rovnovážnej polohy pri šírení zvukového vlnenia – o_A [m^3]
- platí:

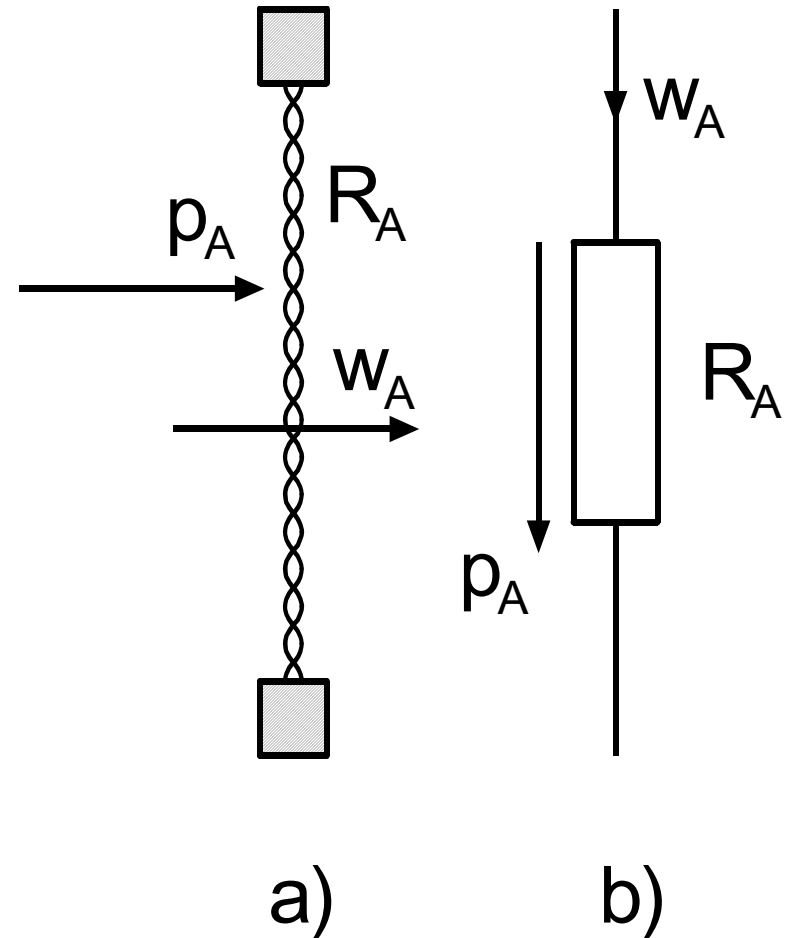
$$w_A(t) = \frac{d o_A(t)}{d t} = S \cdot v(t)$$

Akustický odpor

- části akustických obvodů so zvýšeným trením
 - štrbiny
 - kapiláry
 - hrany objektů
 - mřížky, tkaniny, ...

$$w_A = \frac{p_A}{R_A} \left[Pa, \Omega_A; m^3 s^{-1} \right]$$

$$R_A \left[kg m^{-4} s^{-1}, \Omega_A \right]$$



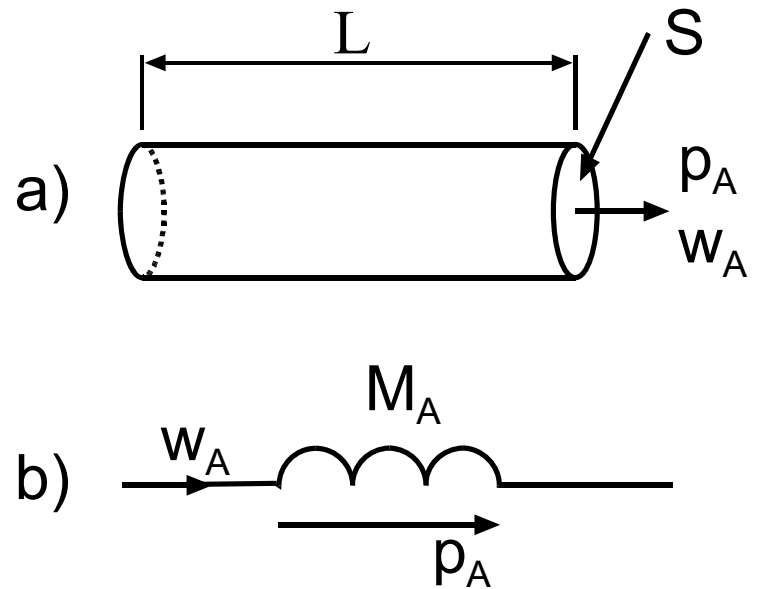
Akustická hmotnosť

- otvorené časti akustických obvodov
 - pohyb častíc vo fáze
 - vzduch tvorí "hmotné teliesko"
 - trubice, otvory, ...

$$w_A = \frac{P_A}{j\omega M_A} \left[\text{Pa}, \text{s}^{-1}, \text{kgm}^{-4}; \text{m}^3 \text{s}^{-1} \right]$$

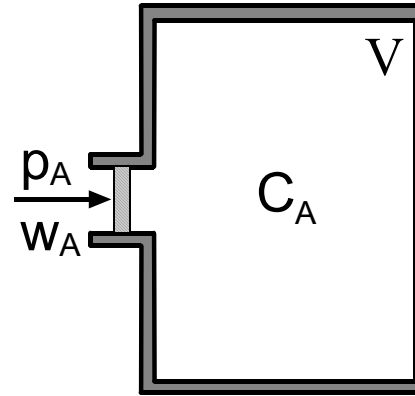
$$M_A = \frac{\rho}{S} \left(l + \frac{16R}{3\pi} \right) \left[\text{kg m}^{-4} \right]$$

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad [\text{m}]$$

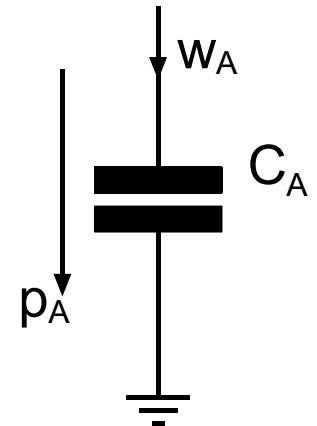


Akustická poddajnosť

- zatvorené časti akustických obvodov
 - na stenách klesá akustický tlak na nulovú hodnotu
 - dutiny, zatvorené skrinky, ...



a)



b)

$$w_A = p_A \cdot j\omega C_A$$

$$C_A = \frac{V}{c_0^2 \cdot \rho} \quad [N^{-1}m^5]$$

Akustická impedancia

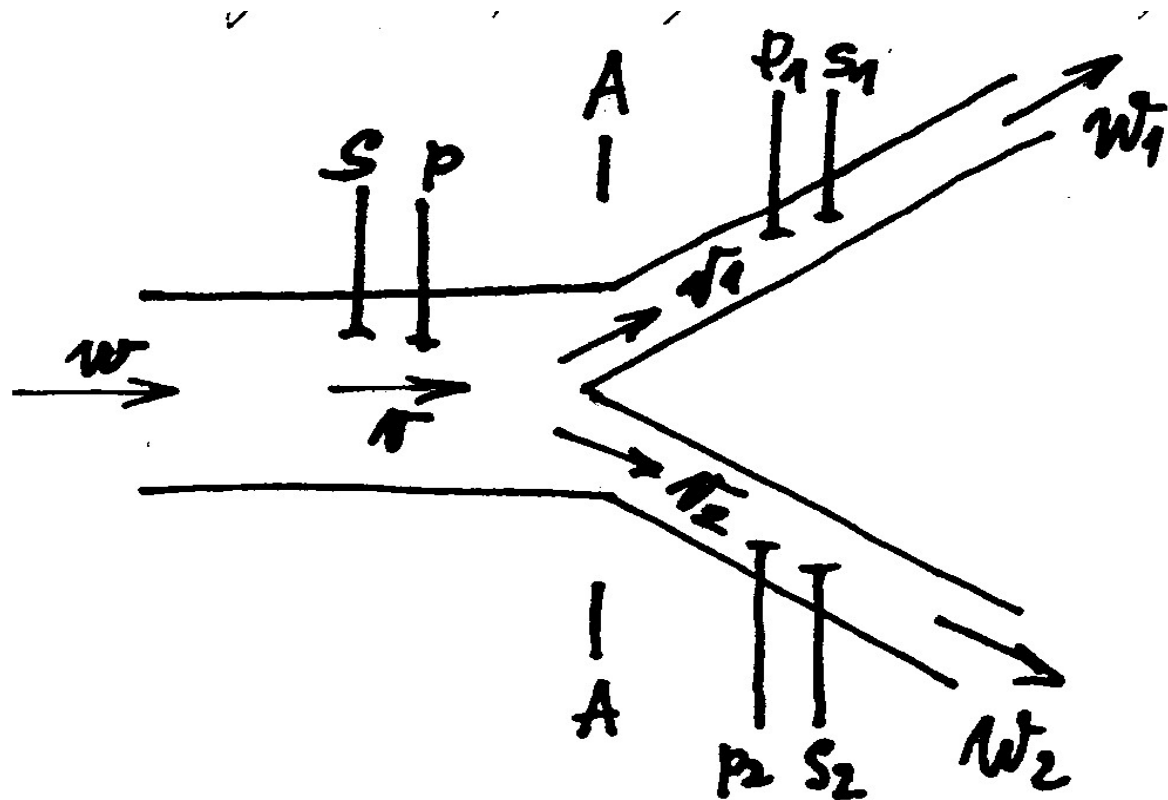
- Akustická impedancia je definovaná ako komplexný pomer akustického tlaku a akustickej objemovej rýchlosti, t.j.:

$$Z_A = \frac{p_A}{w_A} \quad \left[\text{Nsm}^{-5}; \Omega_A \right]$$

Akustická impedancia

$$Z_A = \frac{p_A}{w_A} = \begin{cases} R_A \\ j\omega M_A & (sM_A) \\ \frac{1}{j\omega C_A} & \left(\frac{1}{sC_A} \right) \end{cases}$$

I. Kirchhoffov zákon v akustických sústavách



Obr. 2.41

I. Kirchhoffov zákon v akustických sústavách

$$S = S_1 + S_2$$

$$v = v_1 = v_2$$

$$p = p_1 = p_2$$

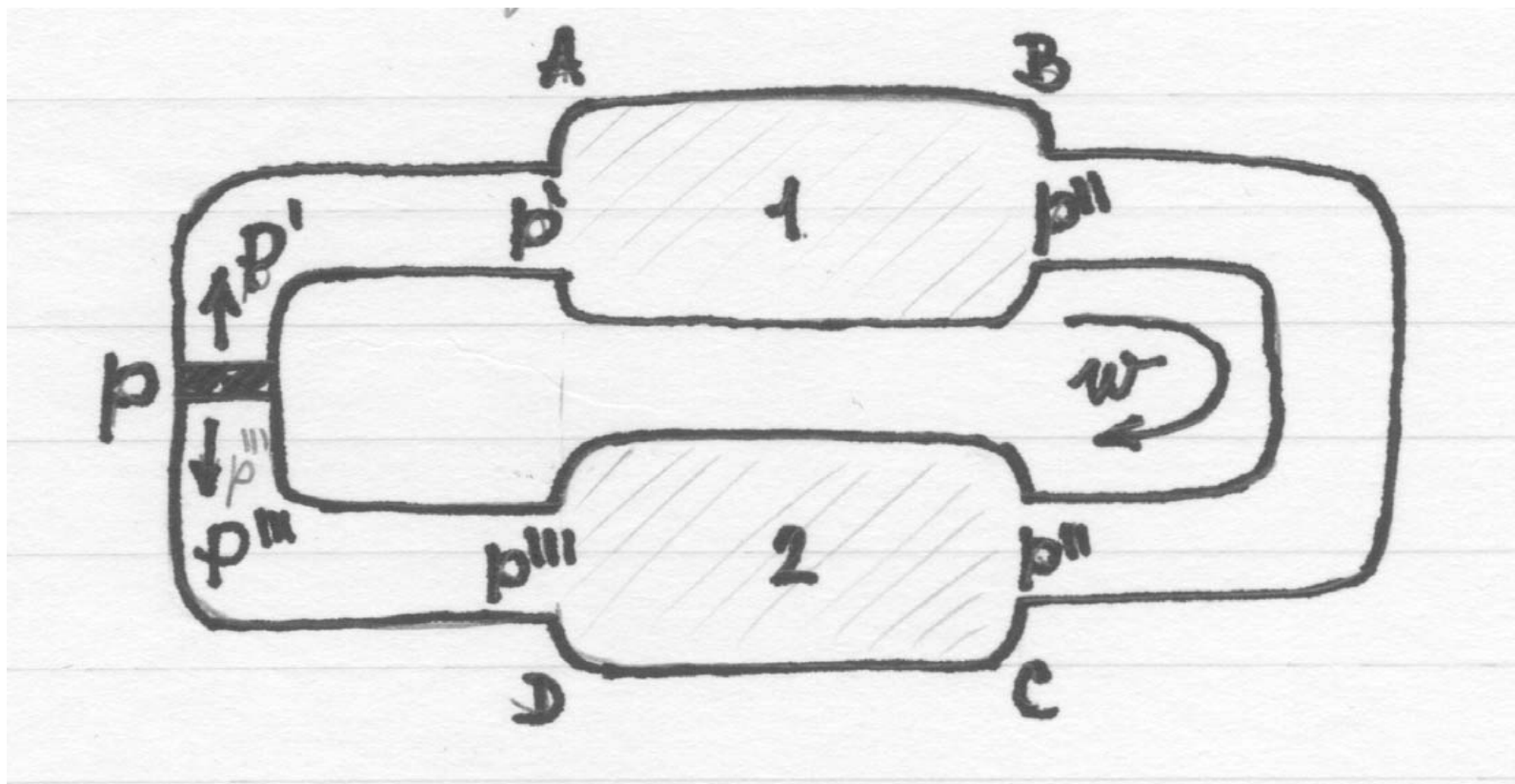
$$Sv = S_1v + S_2v$$

$$Sv = S_1v_1 + S_2v_2$$

$$w = w_1 + w_2$$

$$\sum_i w_{Ai} = 0$$

II. Kirchhoffov zákon v akustických sústavách



II. Kirchhoffov zákon v akustických sústavách

$$W_A = W_{A1} = W_{A2}$$

$$p_1 = p' - p''$$

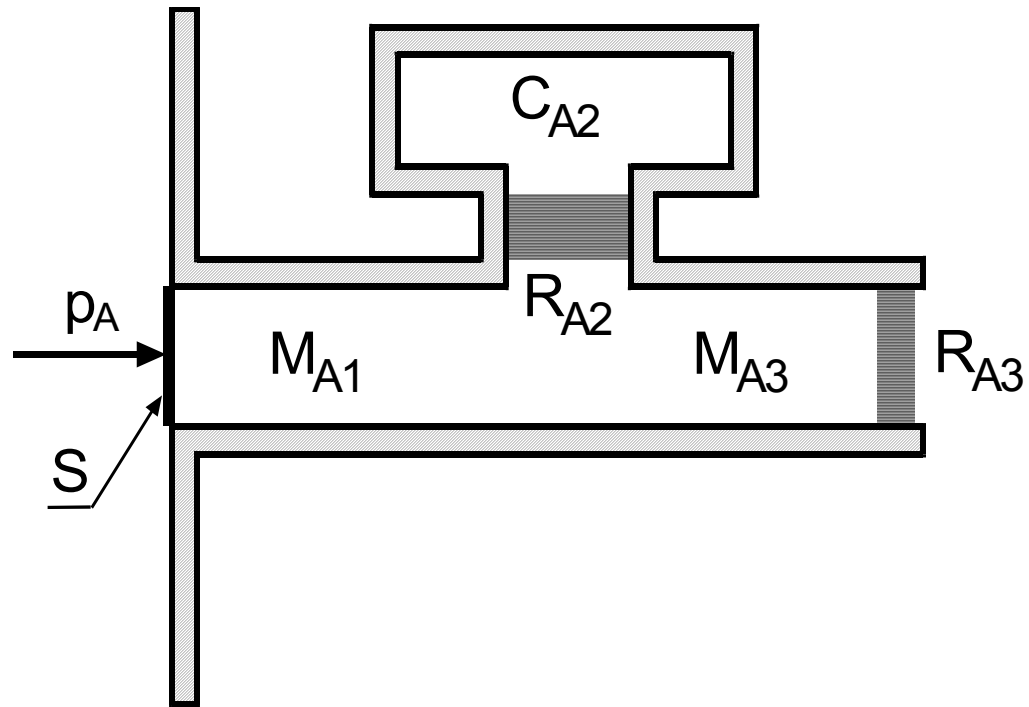
$$p_2 = p'' - p'''$$

$$p = p_1 + p_2 = p' - p'''$$

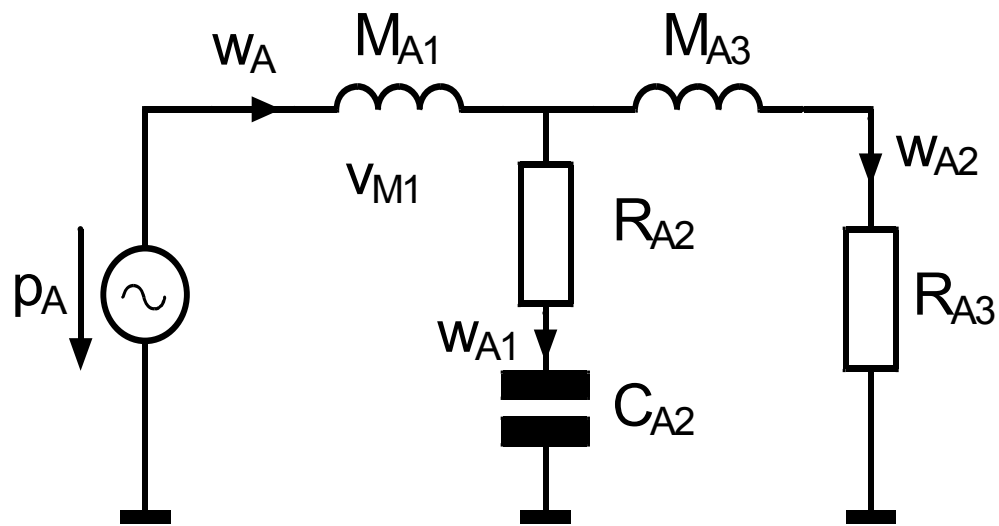
$$p - p_1 - p_2 = 0$$

$$\sum_i p_i = 0$$

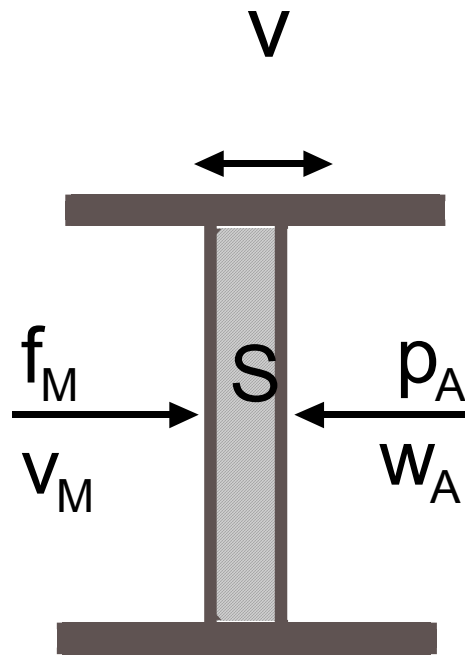
Príklad (1/2)



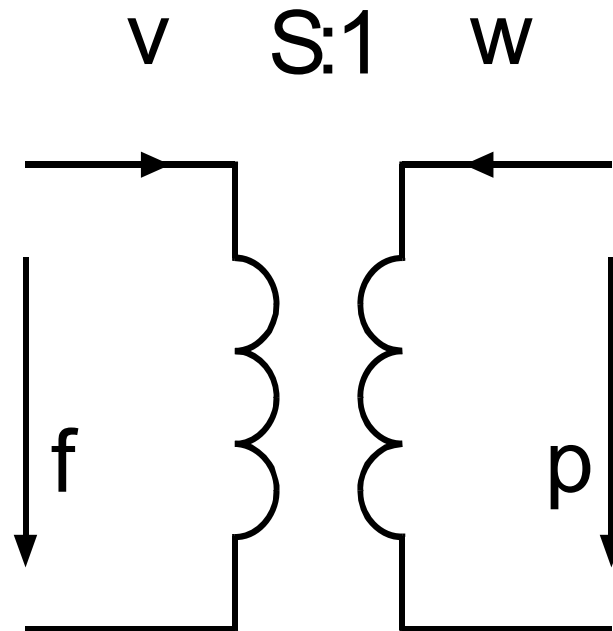
Príklad (2/2)



Mechanicko-akustický menič



a)



b)

$$p_A = \frac{f_M}{S}$$

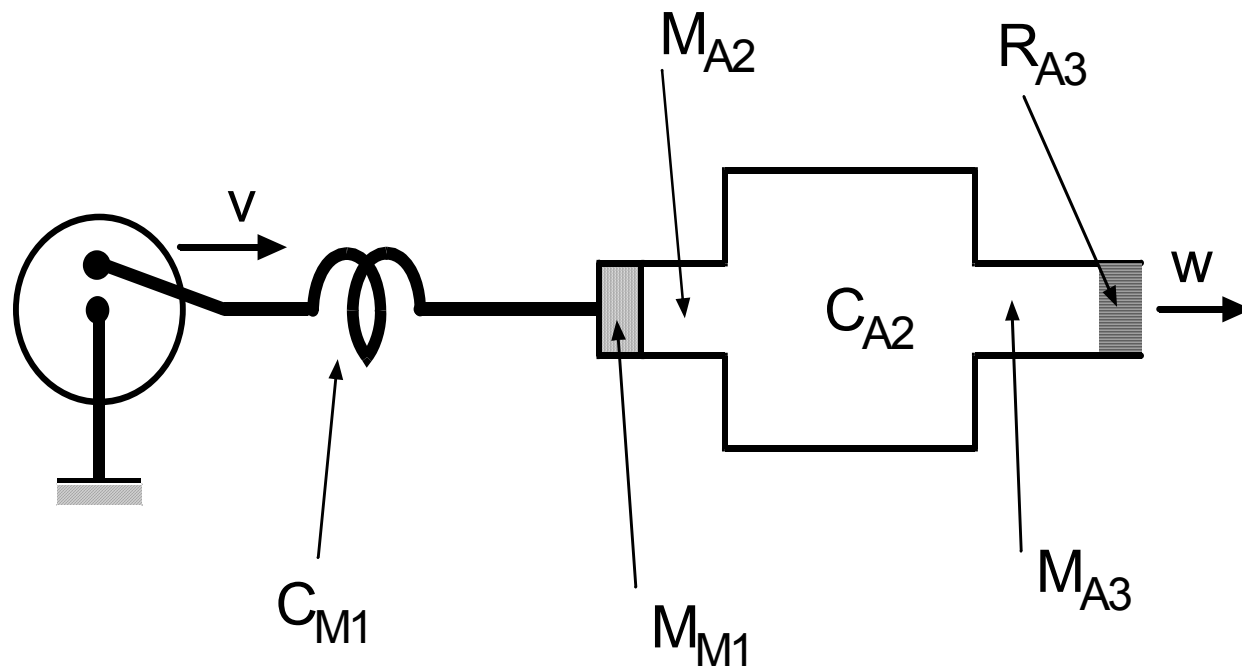
$$w_A = S \cdot v_M$$

$$\frac{p_A}{w_A} = \frac{f_M}{v_M} \cdot \frac{1}{S^2}$$

$$Z_A = Z_M \cdot \frac{1}{S^2}$$

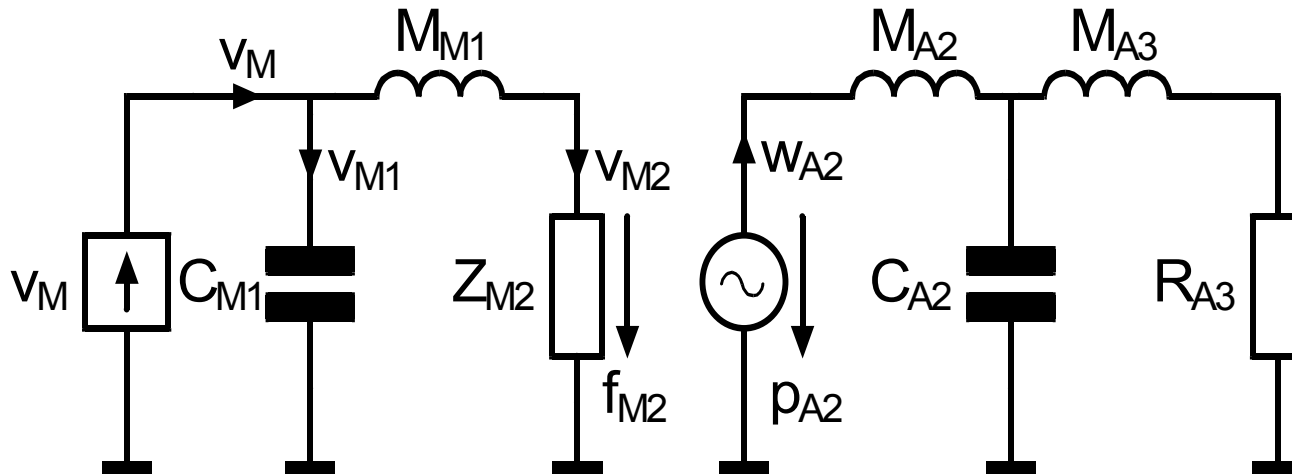
$$\frac{Z_A}{Z_M} = \left(\frac{1}{S} \right)^2$$

Príklad (1/5)



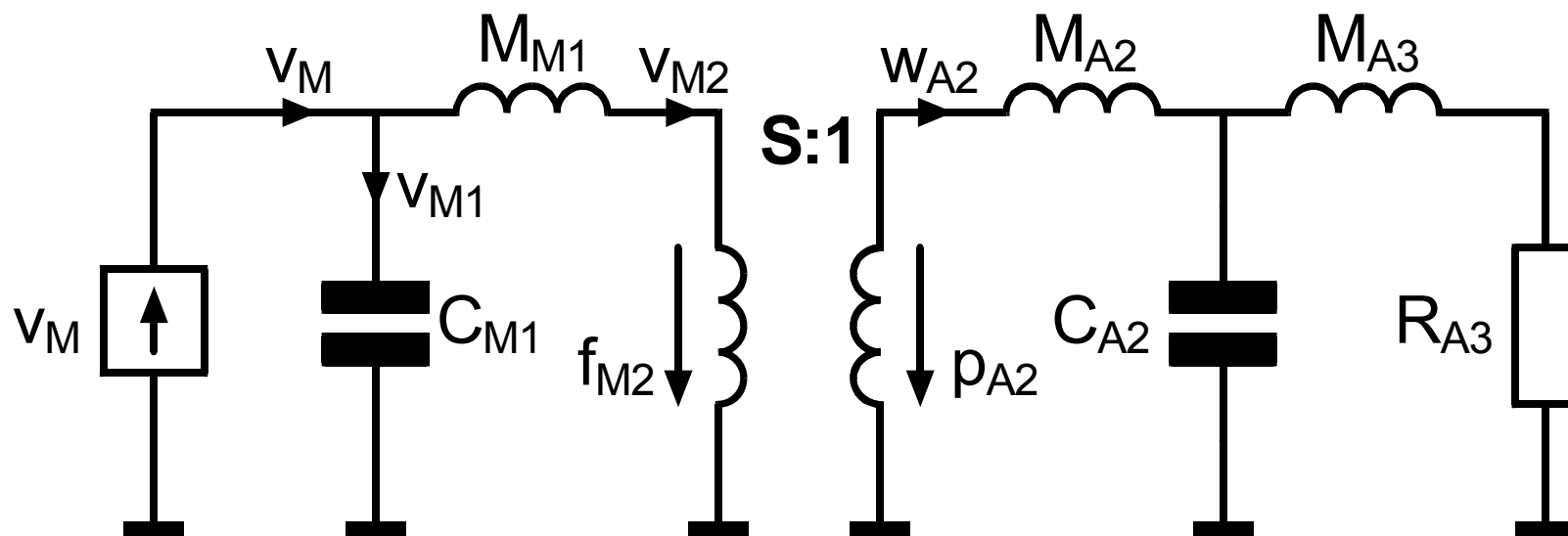
Symbolická schéma mech. části

Príklad (2/5)



$$\left. \begin{array}{l} p_{A2} = \frac{f_{M2}}{S} \\ w_{A2} = S \cdot v_{M2} \end{array} \right\} \frac{p_{A2}}{w_{A2}} = \frac{f_{M2}}{v_{M2}} \cdot \frac{1}{S^2} \Rightarrow Z_{A2} = Z_{M2} \cdot \frac{1}{S^2}$$

Príklad (3/5)



Script of SCRIPT1

System 'S1'

MechResistance 'Rm0' Node=1=2 Rm=1e3Ns/m

MechCompliance 'Cm1' Node=2=0 Cm=1e-3m/N

MechMass 'Mm1' Node=2=3 Mm=10g

Coupler 'Cp1' Node=3=0=4

Ratio=100

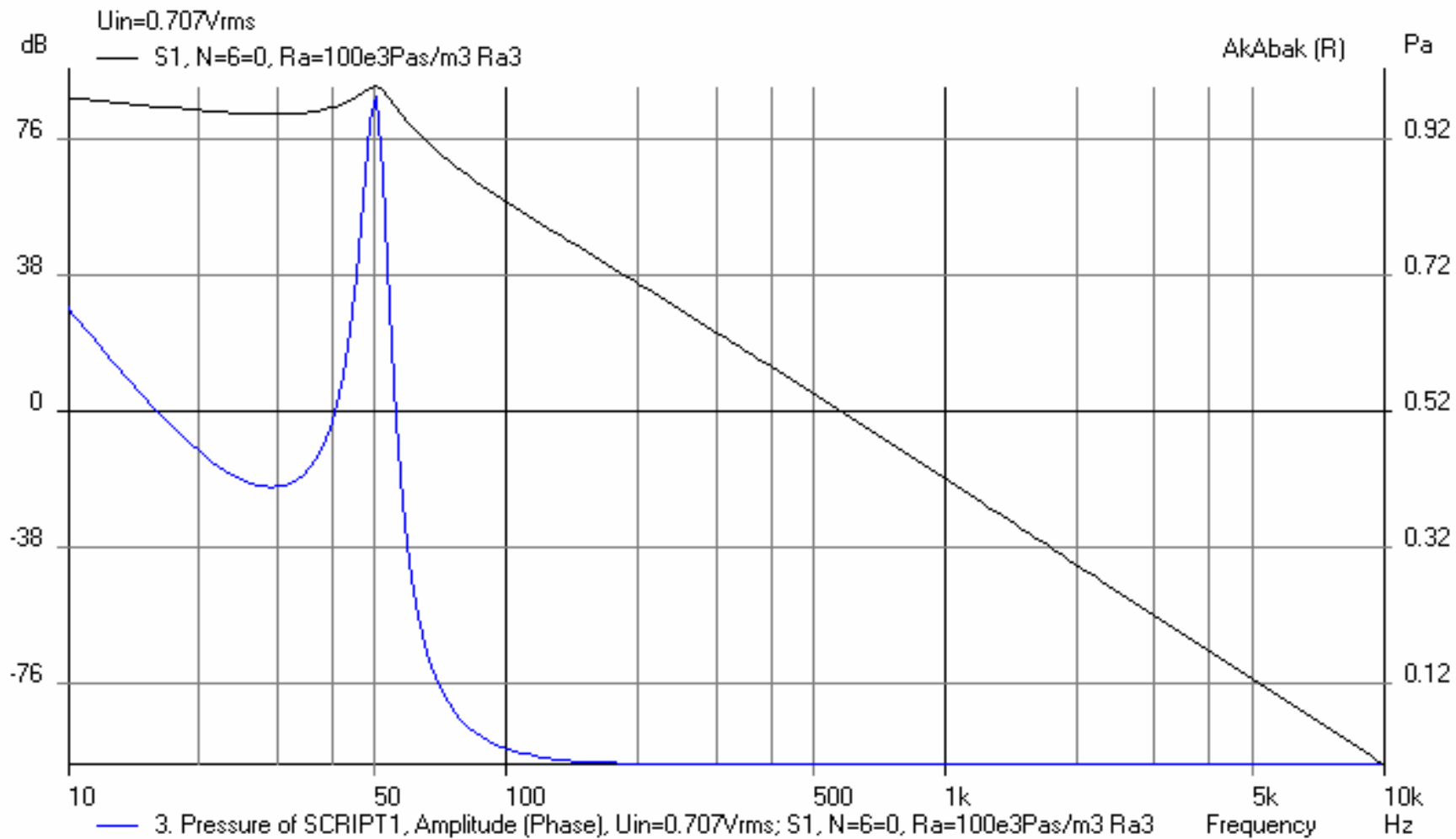
AcouMass 'Ma2' Node=4=5 Ma=100kg/m4

AcouCompliance 'Ca2' Node=5=0 Ca=0.1e-6m3/Pa

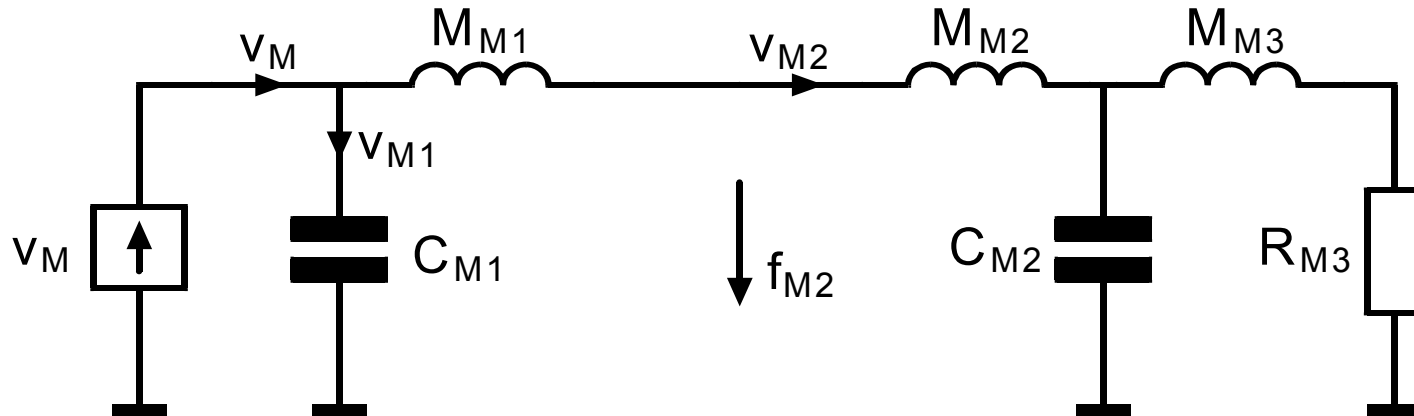
AcouMass 'Ma3' Node=5=6 Ma=100kg/m4

AcouResistance 'Ra3' Node=6=0 Ra=100e3Pas/m3

2. Pressure of SCRIPT1, Lp (Phase)



Príklad (4/5)



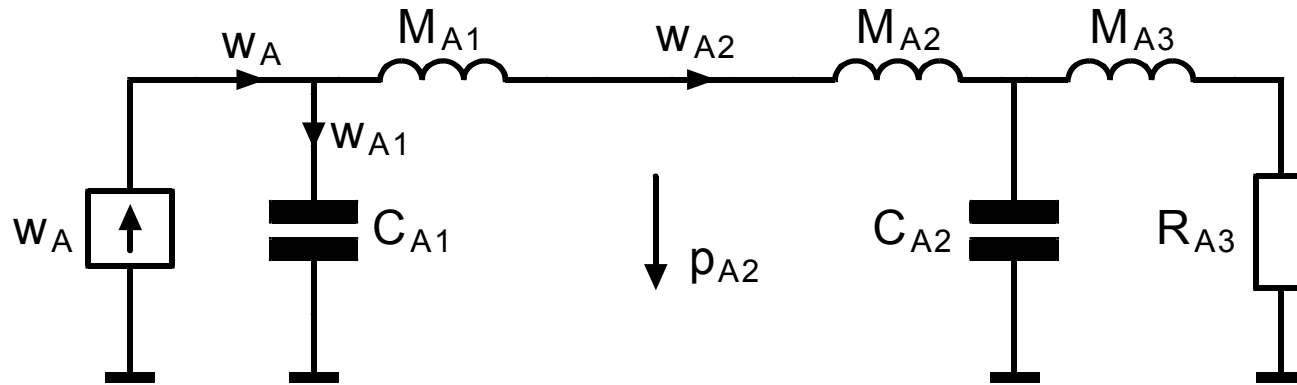
$$Z_{A3} = R_{A3} \Rightarrow Z_{M3} = S^2 \cdot Z_{A3} = S^2 \cdot R_{A3} = R_{M3} \Rightarrow R_{M3} = S^2 R_{A3}$$

$$Z_{A2} = j\omega M_{A2} \Rightarrow Z_{M2} = S^2 \cdot Z_{A2} = S^2 \cdot j\omega M_{A2} = j\omega S^2 M_{A2} = j\omega M_{M2} \Rightarrow M_{M2} = S^2 M_{A2}$$

$$Z_{A3} = j\omega M_{A3} \Rightarrow Z_{M3} = S^2 \cdot Z_{A3} = S^2 \cdot j\omega M_{A3} = j\omega S^2 M_{A3} = j\omega M_{M3} \Rightarrow M_{M3} = S^2 M_{A3}$$

$$Z_{A2} = \frac{1}{j\omega C_{A2}} \Rightarrow Z_{M2} = S^2 \cdot Z_{A2} = S^2 \cdot \frac{1}{j\omega C_{A2}} = \frac{1}{j\omega \frac{C_{A2}}{S^2}} = \frac{1}{j\omega C_{M2}} \Rightarrow C_{M2} = \frac{C_{A2}}{S^2}$$

Príklad (5/5)



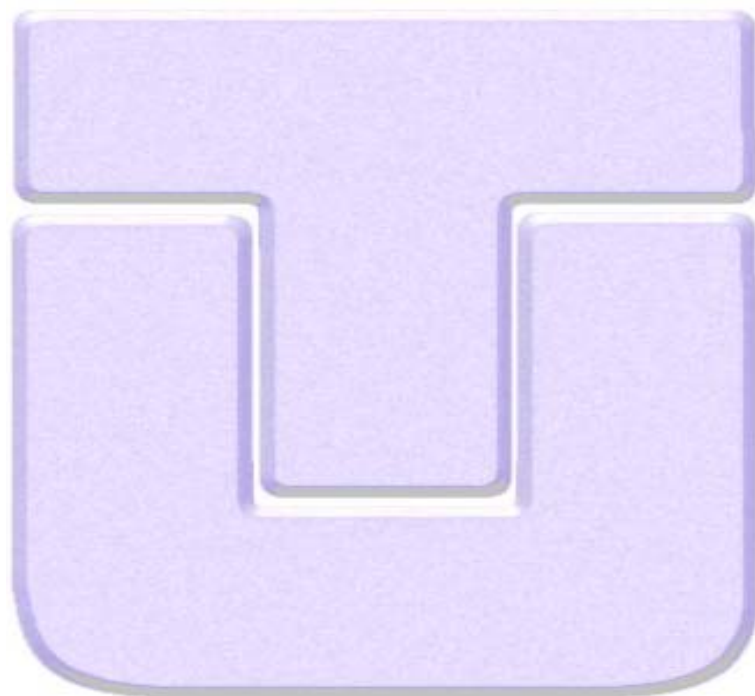
$$M_{A1} = \frac{M_{M1}}{S^2}$$

$$C_{A1} = S^2 C_{M1}$$

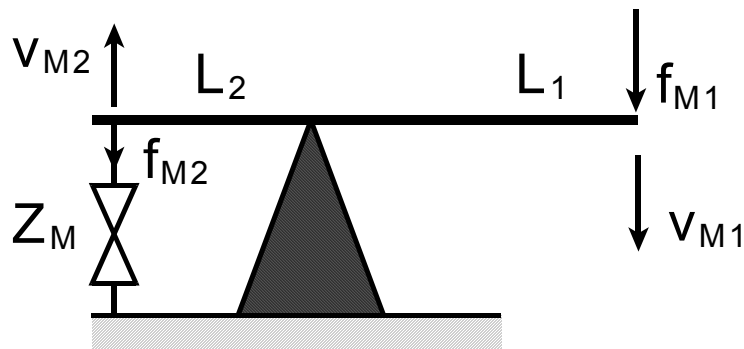
$$W_A = S \cdot v_M$$

Test č. 3

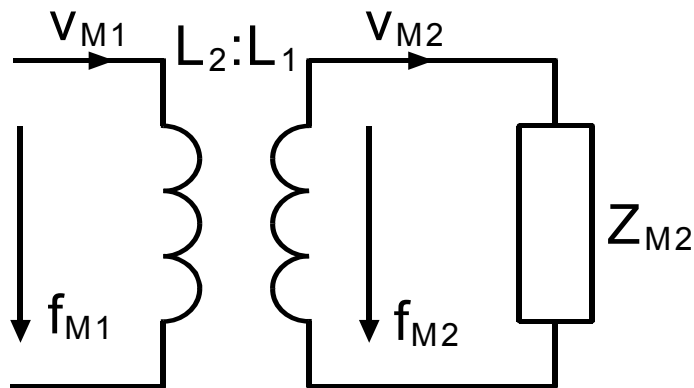
1. Malé akustické obvody sú akustické obvody, ktorých rozmery
 - a) sú oveľa väčšie než vlnová dĺžka zvukového vlnenia
 - b) sú oveľa menšie než vlnová dĺžka zvukového vlnenia
 - c) nezávisia od vlnovej dĺžky
2. Vlastnosť akustickej hmotnosti v akustických sústavách majú:
 - a) kapiláry
 - b) trubice
 - c) dutiny
3. Veľkosť akustickej poddajnosti v akustickej sústave závisí od:
 - a) objemu
 - b) ekvivalentnej dĺžky
 - c) váhy



Mechanický transformátor



a)



b)

$$F_{M1} \cdot L_2 = F_{M2} \cdot L_1$$

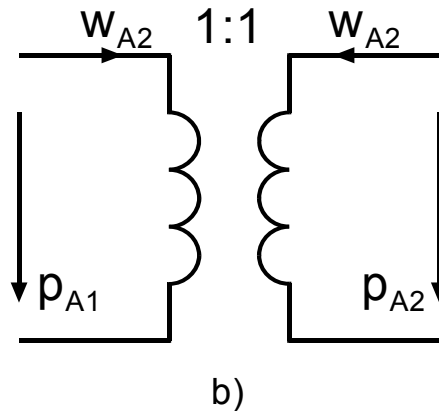
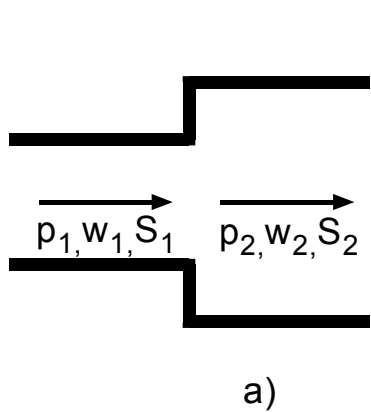
$$v_{m1} \cdot L_1 = v_{m2} \cdot L_2$$

$$\frac{F_{M1}}{v_{m1}} \cdot \frac{L_2}{L_1} = \frac{F_{M2}}{v_{m2}} \cdot \frac{L_1}{L_2}$$

$$\frac{Z_{M1}}{Z_{M2}} = \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2$$

Akustický transformátor

- transformácia akustických impedancií v pomere 1:1
- transformácia mechanických impedancií v pomere $(S_1:S_2)^2$



$$p_{A1} = p_{A2}$$

$$w_{A1} = w_{A2}$$

$$Z_{A1} = Z_{A2}$$

$$\frac{f_{M1}}{S_1} = \frac{f_{M2}}{S_2}$$

$$S_1 v_{M1} = S_2 v_{M2}$$

$$\frac{Z_{M1}}{Z_{M2}} = \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2$$