Číslicová elektronika

Pavol Galajda, KEMT, FEI, TUKE
Pavol.Galajda@tuke.sk

ALGEBRY LOGIKY A LOGICKÉ FUNKCIE

Boolova algebra

- 1849 - George Boole
  - algebraická formulácia procesov logického myslenia
- je algebraický systém (B, . , +, ´, 0, 1)
  - 2 prvky 0 a 1
  - 3 základ. operátory: AND, OR, NOT
  - platí: x.y, x+y, x´ sú tiež prvkami z B

- 6 postulátov:

1.postulát:

V Booleovej algebre sa dva výrazy rovnajú, ak jeden výraz možno nahradiť druhým.

2.postulát:

Existencia prvku 1 a 0

$$x \cdot 1 = x$$

$$x + 0 = x$$

3.postulát:

Komutatívny zákon

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

4.postulát:

Asociatívny zákon

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

5.postulát:

Distríbutívny zákon

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

6.postulát:

Existencia komplementu

$$x \cdot x' = 0$$

$$x + x' = 1$$

7.postulát:

Zákon identickej mocniny

$$x + x = x$$

$$x \cdot x = x$$

8.postulát:

Vlastnosti prvkov 1 a 0

$$x + 1 = 1$$

$$x \cdot 0 = 0$$

- De Morganove pravidlá (pravidlá inverzie)

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\overline{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \ldots\ldots\ldots \overline{x_n}$$

$$\overline{x_1 \cdot x_2 \ldots\ldots\ldots x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots\ldots \overline{x_n}$$

Zobecnenie uvedených pravidiel vyjadruje Shannonovo pravidlo v tvare

$$\overline{f(x_1, x_2, \ldots x_n, +, \cdot)} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots \overline{x_n}, \cdot, +)$$

- Peirceova algebra
  - Peirceova algebra je algebraický systém, ktorý obsahuje najmenej dva prvky 0 a 1 a jeden základný operátor NOR, ktorý sa označuje ako <u>Peirceov operátor</u>. Tento operátor možno vyjadriť v tvare:

$$x \downarrow y = \overline{x + y}$$

- Peirceova algebra
  - z pravidiel Booleovej algebry platia len dve:

1. komutatívny zákon

$x \downarrow y = y \downarrow x$

pretože

$x \downarrow y = \overline{x + y} = \overline{y + x} = y \downarrow x$

2. pravidlo spojovania

$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow \bar{y}) = x$

pretože

$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow \bar{y}) = \overline{\overline{x + y} + \overline{x + \bar{y}}} = (x + y).(x + \bar{y}) = x$

- Schefferova algebra
  - Schefferova algebra je algebraický systém, ktorý obsahuje najmenej dva prvky 0 a 1 a jeden základný operátor NAND, ktorý sa označuje ako Schefferov operátor. Tento operátor možno vyjadriť v tvare:

$$x \mid y = \overline{x \cdot y}$$

- Schefferova algebra
  - z pravidiel Booleovej algebry platia len dve:

1. komutatívny zákon

$$x \mid y = y \mid x,$$

pretože

$$x \mid y = \overline{x.y} = \overline{y.x} = y \mid x.$$

2. pravidlo spojovania

$$(x \mid y) \mid (x \mid \bar{y}) = x,$$

pretože

$$(x \mid y) \mid (x \mid \bar{y}) = \overline{\overline{x.y} \, . \, \overline{x.\bar{y}}} = \overline{\overline{x.y}} + \overline{\overline{x.\bar{y}}} = x.y + x.\bar{y} = x.$$

- Logické funkcie
  - Logické funkcie sú funkcie, ktorých argumenty a funkčné hodnoty nadobúdajú konečný počet hodnôt. Dvojhodnotové logické funkcie sa nazývajú **Boolovými funkciami**.
  - log. funkcia: $f(x_1, x_2, \dots x_n).$
  - oblasť definície: množina 2^n navzájom rôznych n-tíc

$$f(x_1, x_2) \Rightarrow \{00,\ 01,\ 10,\ 11\}$$

  - hodnota log. funkcie môže nadobudnúť hodnoty:

    0 a 1

- Zápis logických funkcií

Zápis logických funkcií pomocou tabuľky

- obsahuje všetky n - tice argumentov a im zodpovedajúce hodnoty
- **úplne** a **neúplne** určená logická funkcia

číslo bodu	x_2	x_1	$f(x_1,x_2)$
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

číslo bodu	x_2	x_1	$f(x_1,x_2)$
0	0	0	0
1	1	0	0
3	1	1	1

- Zápis logických funkcií

Zápis pomocou množín funkčných hodnôt

Úplne určenú logickú funkciu z predošlého príkladu možno vyjadriť nasledovne

$$f(x_1, x_2) = M_1 = \{3\}$$

$$f(x_1, x_2) = M_0 = \{0,1,2\}.$$

Neúplne určenú logickú funkciu z predošlého príkladu možno vyjadriť nasledovne

$$f(x_1, x_2) = M_1 = \{3\} \qquad f(x_1, x_2) = M_0 = \{0,1\}$$

$$f(x_1, x_2) = M_x = \{2\}.$$

- Zápis logických funkcií

Zápis logických funkcií v kanonickom tvare

Každú logickú funkciu možno vyjadriť pomocou dvoch kanonických tvarov.

1. **kanonický tvar**

   \- vyjadruje logickú funkciu ***f(x₁, x₂, x₃, ... xₙ)*** v tvare **súčtu súčinov** premenných. Možno ho zapísať v tvare:

$$f(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n) = \sum f(e_1, e_2, e_3 \ldots e_n)\, x_1^{e_1}\, x_2^{e_2}\, x_3^{e_3} \ldots x_n^{e_n}$$

$e_1, e_2, e_3 \ldots\ldots e_n$ - aktuálna kombinácia premenných,

pričom platí $e_i \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

- Zápis logických funkcií

Zápis logických funkcií v kanonickom tvare

$f(e_1, e_2, e_3 \ldots\ldots e_n)$ – funkčná hodnota logickej funkcie pre aktuálnu kombináciu premenných,

pričom $f(e_1, e_2, e_3 \ldots e_n) \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Pre $x_i^{e_i}$ platí

$$e_i = 1 \qquad x_i^{e_i} = x_i^1 = x_i$$

$$e_i = 0 \qquad x_i^{e_i} = x_i^0 = \bar{x}_i$$

- Zápis logických funkcií

Zápis logických funkcií v kanonickom tvare

$$f(x_1, x_2, x_3 \dots\dots x_n) = \sum x_1^{e_1} x_2^{e_2} x_3^{e_3} \dots\dots x_n^{e_n}$$

- vyjadrenie logickéj funkcie v uvedenom kanonickom tvare sa nazýva **ú**plná **n**ormálna **d**isjunktívna **f**orma (**UNDF**). Každý člen v tomto vyjadrení sa,nazýva **minterm**.

- Zápis logických funkcií

Zápis logických funkcií v kanonickom tvare

2. **kanonický tvar**

   - vyjadruje logickú funkciu ***f(x₁, x₂, x₃, ... xₙ)*** v tvare **súčinu súčtov** premenných. Možno ho zapísať v tvare:

$$f(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n) = \prod \left[f(e_1, e_2, e_3 \ldots e_n) + \left(x_1^{e_1'} + x_2^{e_2'} + x_3^{e_3'} + \ldots + x_n^{e_n'} \right) \right],$$

- Zápis logických funkcií

Zápis logických funkcií v kanonickom tvare

$$f(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots, x_n) = \prod (x_1^{e_1'} + x_2^{e_2'} + x_3^{e_3'} + \ldots\ldots + x_n^{e_n'})$$

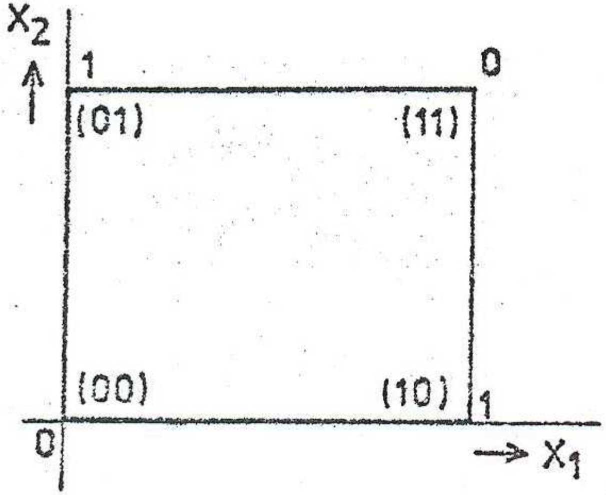
- vyjadrenie logickéj funkcie v uvedenom kanonickom tvare sa nazýva **ú**plná **n**ormálna **k**onjuktívna **f**orma (**UNKF**). Každý člen v tomto vyjadrení sa,nazýva **maxterm**.

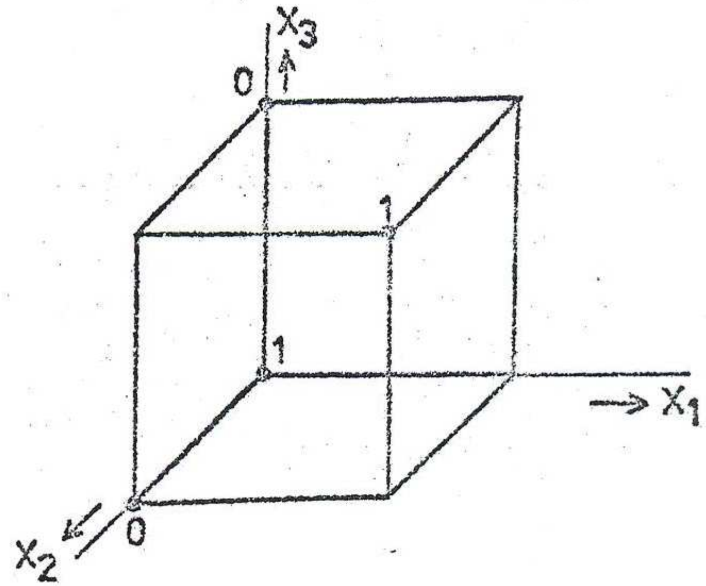
- Grafické znázornenie logických funkcií

zápis log. f. vo vrcholoch n-rozmernej kocky

x_1	x_2	$f_1(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
1	1	1	1

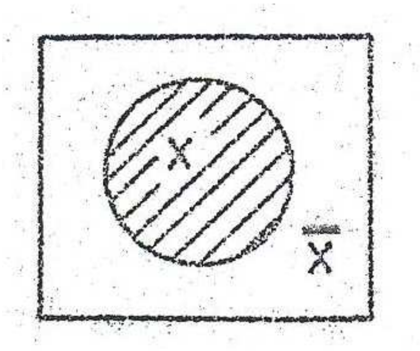


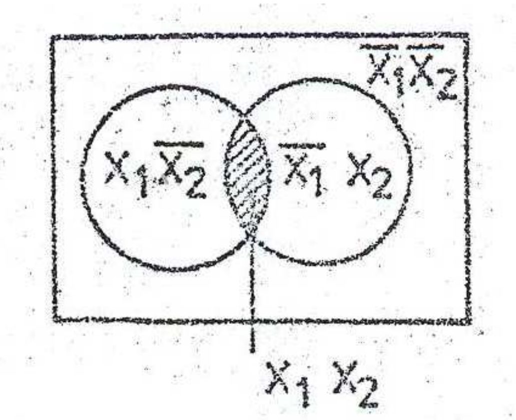


- Grafické znázornenie logických funkcií

Vennove diagramy

- Definičná oblasť funkcie je predstavená rovinným útvarom, pričom každej premennej sú v tomto útvare priradené dve oblasti. V jednej oblasti premenná nadobúda hodnotu **1**, v druhej **0**.

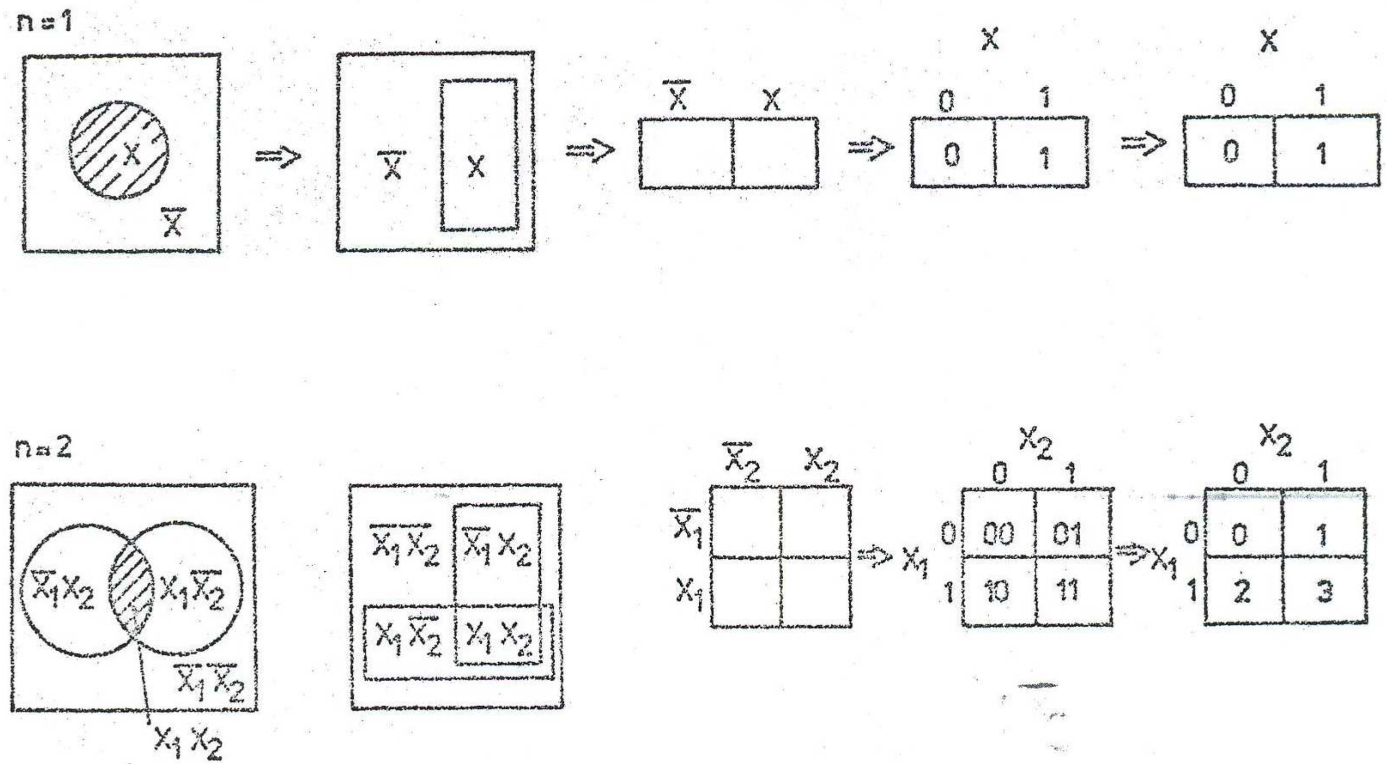




- Grafické znázornenie logických funkcií

Karnaughove mapy

- sú odvodené *z* Venových diagramov. Každej oblasti *z* Vennovho diagramu zodpovedá jeden štvorček mapy. Počet štvorčekov pre n-premenných je 2^n. Prechod od Vennových diagramov ku Karnaughovým mapám:



- Grafické znázornenie logických funkcií

Karnaughove mapy pre n=3

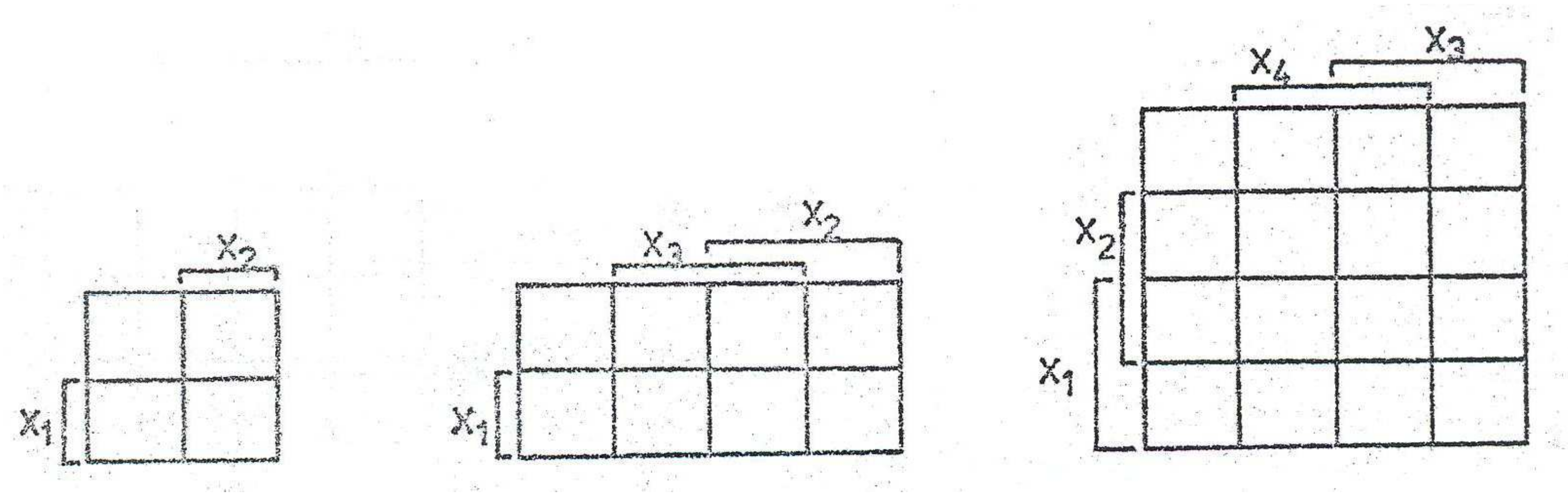
	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_2x_3$	x_2x_3	$x_2\bar{x}_3$
$\bar{x}_1$				
x_1				

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	000	001	011	010
1	100	101	111	110

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

- Grafické znázornenie logických funkcií

Karnaughove mapy



- Najviac používané logické funkcie sa znázorňujú schematicky pomocou značiek. Uvedieme príklady značenia niektorých logických funkcií: